MATEMATICAS UNIVERSITARIAS

Cuarta edición

Carl B. Allendoerfer
Profesor de Matemáticas
University of Washington

Cletus O Oakley
Profesor y jefe del departamento de Matemáticas
Haveford College

Adaptación
María Emilia Eslava Espinel
Licenciada en Física y Matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Administradora docente del área de Matemática
Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

Julio César Monroy Parra
Licenciado en Matemática y Física
Universidad de Pamplona
Profesor de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Llozano
Profesor de la Universidad Central

José R. Velasco Quintero
Licenciado en Matemática y Física
Universidad de Pamplona
Coordinador general del área de Matemática
Universidad Jorge Tadeo Lozano
Profesor de la Universidad de Los Andes

McGRAW-HILL

Bogotá, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, Lisboa, Madrid, México,
Nueva York, Panamá, San Juan, Sao Paulo
Auckland, Hamburgo, Londres, Montreal, Nueva Delhi, París,
San Francisco, San Luis, Sidney, Tokio, Toronto.

Revisión Técnica

Héctor Alfonso Ruíz Moreno
Profesor
Pontificia Universidad Javeriana
Universidad Santo Tomás
Corporación Universidad Piloto de Colombia

Jaime A. García
Departamento de Matemáticas
Universidad Externado de Colombia

Hernando Bedoya
Profesor
Universidad Eafit

Francisco Soler Fajardo
Licenciado en física y en matemática
Pontificia Universidad Javeriana
Profesor de Matemática
Facultad de ciencias económicas y administrativas
Pontificia Universidad Javeriana

Hernando Prado
Ingeniero electromecánico
Profesor
Universidad del Valle

Rafael Rodríguez
Profesor
Universidad Santo Tomás

Traducido de la tercera edición en inglés de
FUNDAMENTALS OF FRESHMAN MATHEMATICS

ISBN 0-07-091509-1

Adaptado de la tercera edición en español de
FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS UNIVERSITARIAS

ISBN 968-6046-95-X

ISBN 968-422-043-X

1234567890 9123456780

Impreso en Colombia *Printed in Colombia*

Se imprimieron 4.000 ejemplares en el mes de febrero de 1990

Impresor: Editorial Kinpres Ltda., Bogotá, Colombia

Prólogo

El presente texto ha sido concebido y escrito para ser utilizado por estudiantes de ciencias económico-administrativas, en dos cursos: uno de matemáticas básicas y otro de cálculo.

Aspectos metodológicos

Los cambios que realizamos en la nueva edición de este libro están hechos con base en nuestra experiencia como profesores universitarios, durante la cual hemos detectado las necesidades, preocupaciones y dudas más frecuentes con que llegan los estudiantes a la universidad. Por estas razones consideramos de gran ayuda para la enseñanza de estos dos cursos incluir en cada capítulo los siguientes aspectos:

Objetivos

Al iniciar cada capítulo presentamos los objetivos que se deben alcanzar al finalizar su estudio. Consideramos que sirven como guía y motivación tanto a profesores como a estudiantes.

Introducción

En la introducción de cada capítulo presentamos algunos aspectos históricos sobre los temas a estudiar y sobre quienes hicieron algún tipo de aporte a dicho tema. Además se exponen rápidamente los motivos por los cuales se incluyen los diversos aspectos a tratar.

Aspectos teóricos

En esta parte se incluyen definiciones, teoremas, ejemplos, cuadros, gráficas, diagramas y todo lo relacionado con la parte teórica del capítulo. Las definiciones se han escrito en forma sencilla, de manera que sean claras y útiles para el estudiante. Los teoremas se han utilizado para la solución de ejercicios de aplicación, sin hacer una demostración rigurosa de los mismos. Mediante ejemplos se ha procurado ilustrar todas las situaciones posibles, así como solucionar una amplia gama de problemas. Hasta donde ha sido posible, hemos procurado presentar el mayor número de gráficos y diagramas ya que consideramos que la visualización de una determinada situación facilita su comprensión y por ende su solución.

Resumen

Antes de plantear los ejercicios al final de cada capítulo, se ha hecho un resumen de los contenidos tratados en el mismo con el fin de que puedan ser consultados fácilmente al resolver los ejercicios.

Ejercicios

Al finalizar cada capítulos se plantea una suficiente cantidad de ejercicios, presentados teniendo en cuenta su grado de dificultad. Al final del texto se dan las respuestas a todos los ejercicios planteados, para mejor guía y motivación de los estudiantes.

Bibliografía

Se anexa una breve bibliografía con el ánimo de que los estudiantes que así lo consideren pueden ampliar y/o complementar los temas tratados.

Cambios en los contenidos

En esta nueva edición, los cambios han sido muy amplios, según los objetivos del libro: "servir de texto, especialmente, a los estudiantes de ciencias económico-administrativas".

Se suprimieron algunos temas como trigonometría y funciones hiperbólicas, pero también se anexaron y ampliaron otros, así:

El Capítulo I de la edición anterior, que contenía una mezcla de lógica y conjuntos, se separó en dos capítulos, uno de conjuntos y otro de lógica, en donde se aclaran mucho más los conceptos.

Del capítulo correspondiente a Números, se eliminó lo relativo a los números complejos, de los cuales únicamente se da su descripción.

Los Capítulos III y IV que anteriormente se llamaban Polinomios y Fracciones algebraicas respectivamente, se reúnen en esta edición en un nuevo capítulo denominado Algebra básica, en el cual se hace una diferenciación entre el concepto de expresión algebraica y polinomio, que se usaba en forma no muy apropiada en el texto anterior.

En el Capítulo VI sobre ecuaciones, se han introducido algunos conceptos económicos tales como la definición de ingreso, costo y utilidad, ecuación de oferta, ecuación de demanda, etc., que son necesarios para la realización de problemas de aplicación. En este mismo capítulo se ha tratado de clasificar los problemas de acuerdo con ciertas características, (ver página 111).

Se colocó inmediatamente el capítulo sobre Polinomios y Funciones polinómicas (Capítulo X de la edición anterior, Funciones algebraicas), con algunos teoremas sobre raíces de las ecuaciones: el teorema fundamental del álgebra, el teorema del factor, algo de teoría sobre raíces racionales y la división sintética.

En el capítulo sobre Inecuaciones se incluyó la teoría para la solución de inecuaciones de grado mayor o igual a dos.

Del capítulo sobre Matrices se eliminó la parte correspondiente a vectores, incluyendo en cambio el método de reducción de Gauss. El concepto de

determinante se traslado al Capítulo X, sección Algunas funciones especiales. En este capítulo se presentan los conceptos generales sobre funciones y algunas funciones especiales como parte entera, funciones inyectivas y biyectivas, funciones pares e impares y función periódica.

En los Capítulos XII y XIII se incluyen casi todos los temas del cálculo diferencial con sus respectivas aplicaciones.

El último capítulo sobre la integral, contiene las reglas básicas de integración y algunas aplicaciones. Finalmente se incluye un Apéndice con algunos temas que fueron eliminados del libro, y otro con temas de interés general tales como trigonometría, geometría analítica y algunas fórmulas fundamentales de derivación e integración.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestros agradecimientos a todas aquellas personas que de alguna manera hicieron posible la culminación de este libro, a todos los profesores que hicieron correcciones y sugerencias en cada uno de los capítulos, a los profesores que colaboraron en la solución de ejercicios y problemas propuestos, y a nuestra secretaria que en forma desinteresada transcribió los manuscritos.

Los adaptadores

Contenido

Capítulo IV: ALGEBRA BASICA

OBJETIVOS

Capítulo V: EXPONENTES Y RADICALES

OBJETIVOS

Capítulo VI: ECUACIONES

OBJETIVOS

Capítulo VII: POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINOMIALES

OBJETIVOS

Capítulo VIII: INECUACIONES

OBJETIVOS

Capítulo IX: MATRICES

OBJETIVOS

Capítulo X: FUNCIONES

OBJETIVOS

Capítulo XIV: LA INTEGRAL

CAPITULO 1

Conjuntos

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Establecer relaciones entre los conjuntos y sus elementos.
2. Realizar operaciones entre los conjuntos.
3. Demostrar las propiedades de los conjuntos usando diagramas de Venn-Euler.
4. Realizar problemas sobre el cardinal de un conjunto.

1.1 Introducción

El tema que usted va a comenzar a estudiar, no es ni debe ser totalmente desconocido ya que seguramente en muchas ocasiones habrá tenido la oportunidad de trabajar con conjuntos; por ejemplo, recuerde que México, Estados Unidos y Canadá conforman el conjunto denominado Norteamérica.

Formalmente fue George Cantor (1845-1918) quien a mediados del Siglo XIX creó las bases de lo que hoy se denomina la "teoría de conjuntos". Comprender claramente los conceptos básicos de la teoría de conjuntos será objetivo de este capítulo y materia fundamental para el estudio de los posteriores.

1.2 Concepto y notación de conjunto

Consideramos un conjunto como una colección de objetos: lápices, árboles, puntos, etc. Los componentes individuales de un conjunto son sus elementos. Como un ejemplo, considérese el conjunto formado por cuatro muchachos llamados Jaime, Daniel, Diego y Manuel. Este conjunto tiene cuatro elementos. Los conjuntos pueden, sin embargo, tener cualquier número de elementos. Podemos pensar en el conjunto de todos los granos de arena de una playa; este conjunto tiene un número finito de elementos pero este número es, indudablemente, muy grande. Un ejemplo de un conjunto infinito es el conjunto de todos los enteros positivos 1, 2, 3, 4, 5, . . . En realidad, puede existir también un conjunto que no contenga elementos, a tal conjunto lo llamamos conjunto vacío.

Podemos describir de esta manera los diversos conjuntos, pero conjunto es un término primitivo que no se puede definir. Por tanto, aceptamos conjunto y elemento como términos no definidos.

Los conjunto se representan con letras mayúsculas.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{$álgebra, geometría, cálculo$\}$

Como observara en los ejemplos anteriores, los elementos del conjunto se encuentran encerrados entre llaves $\{\ \}$ y separados por comas.

Ejemplo 1

El conjunto de las vocales se representa así:

$$\{a, e, i, o, u\}$$

que podemos llamar el conjunto V, por tanto

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Note que para representar los elementos de este conjunto hemos utilizado minúsculas.[1]

Existen dos formas para describir los elementos de un conjunto: por extensión y por comprensión.

Un conjunto se describe por extensión cuando se listan los elementos del conjunto. Ejemplos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 19\}$$

En el caso del conjunto B, los puntos suspensivos indican que los números impares continúan hasta 19.

Un conjunto se describe por comprensión cuando se da una regla que permita escribir todos los elementos del conjunto. Ejemplos:

1. $R = \{x/x$ es un número real$\}$, el conjunto de todos los números reales. Esta expresión se puede leer: "El conjunto R es el conjunto de todos los números x tales que x es un número real". El pequeño segmento de recta vertical se lee "tal que".
2. $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+$ y $x < 6\}$, el conjunto de todos los enteros positivos menores que 6.

   Un conjunto como R se denomina conjunto *infinito* ya que tiene un número infinito de elementos, mientras que un conjunto como B se denomina conjunto *finito*.
3. $Z^+ = \{x/x$ es un entero positivo$\}$, el conjunto infinito de todos los enteros positivos. Con frecuencia este conjunto se escribe $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
4. $A = \{x/x$ es un entero positivo par$\}$, el conjunto infinito de todos los enteros positivos pares. Muchas veces se representa por $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

[1] En algunos casos especiales representaremos los elementos con letras mayúsculas.

5. $J = \{R/R$ murió en la segunda guerra mundial$\}$, el conjunto de todas las personas que murieron durante la segunda guerra mundial.
6. $E = \{T/T$ es un triángulo isósceles de un plano dado$\}$, el conjunto de todos los triángulos isósceles de un plano dado.
7. $M = \{L/L$ es una recta paralela a la recta $M\}$, el conjunto de todas las rectas paralelas a una recta dada M.
8. $S = \{x/x > 8$ y $x < 6\}$, al conjunto S lo llamaremos conjunto *vacío* ya que no hay ningún número que simultáneamente sea mayor que 8 y menor que 6, y por tanto S no tiene ningún elemento.

   Escribimos entonces $S = \{\ \}$ o preferiblemente $S = \phi$.

Cualquier conjunto que contenga los elementos de los conjuntos que se están considerando en un análisis dado, se denomina conjunto *Universal* y se representa por la letra U. En los ejemplos anteriores el conjunto R se puede considerar como el conjunto Universal para los conjuntos B, Z^+ y, A ya que a R pertenecen todos los elementos de los conjuntos mencionados. Por medio de diagramas podemos representar los conjuntos anteriores. (*Véase* Figura 1.1).[2]

1.3 Relaciones entre conjuntos

Relación de pertenencia

Cuando estamos interesados en relacionar un elemento de un conjunto con un conjunto, hablamos de relación de pertenencia y utilizamos la notación $\in$.

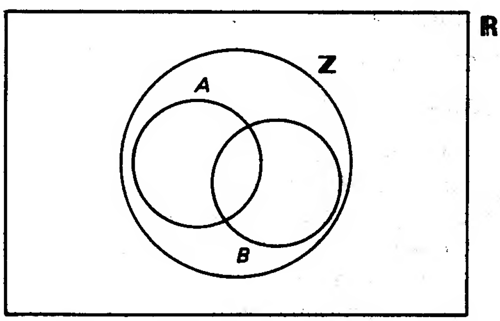


Figura 1.1 Relación entre los conjuntos A, B, $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2

Sea $A = \{8, 10, 12, 14, 16\}$

Entonces escribimos $8 \in A$, que significa que 8 "pertenece a" A. De la misma manera podemos decir que $10 \in A$.

Observe que 5 "no pertenece a" A. En este caso se nota $5 \notin A$.

---

[2] Estos diagramas se denominan *Diagramas de Venn-Euler.*

Relación de contenencia

Cuando queremos relacionar un conjunto con otro conjunto, hablamos de la relación de "contenencia" y utilizamos la notación $\subset$.

Ejemplos

Considere los siguientes conjuntos:

$M = \{1, 3, ,5, 7\}$
$N = \{2, 4, 6, 8\}$
$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Observe que todos los elementos del conjunto M se encuentran también en el conjunto Q; decimos entonces que M está contenido en Q y lo denotamos así: $M \subset Q$. En este caso también se dice que M es *subconjunto* de Q. Observe que N también es un subconjunto de Q, entonces $N \subset Q$.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces decimos que A es igual a B y escribimos $A = B$. En caso contrario $A \neq B$.

Ejemplo 3

$A = \{x/x \text{ es positivo par} \leqslant 8\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

$D = \{x/x \in Z, x \leqslant 10\}$

Note que:

1) $A \subset C$ y $C \subset A$, luego $A = C$
2) $A \subset D$, $B \subset D$, $C \subset D$, $D \subset D$
3) $A \neq B$, $B \neq D$ (Aun siendo $B \subset D$)

Debe ser claro que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Si A es subconjunto de B, pero A es diferente de B, entonces decimos que A es un *subconjunto propio* de B; esto es:

Si $A \subset B$, $A \neq B$, entonces A es un subconjunto propio de B.

En el ejemplo anterior, A es subconjunto propio de D.

Si A es un conjunto cualquiera, entonces ϕ está contenido en A; luego el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

El conjunto partes de

Sea $T = \{1, 2, 3\}$, los subconjuntos de T son:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

El conjunto conformado por los anteriores conjuntos se denomina *partes de T* y se denota así:

$$\wp(T) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

El número de elementos del conjunto partes de T es 2^n, en donde n es el número de elementos de T.

El conjunto $\{1\}$ "pertenece a" $\mathcal{P}(T)$; observe que la relación de pertenencia se puede establecer también entre un par de conjuntos.

Para cualquier conjunto A, se tiene que vacío y A pertenecen al conjunto partes de A.

1.4 Operaciones entre conjuntos

Hasta ahora hemos estudiado el lenguaje de los conjuntos y algunas relaciones entre ellos. Veamos ahora cómo se forman conjuntos a partir de otros conjuntos.

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{3, 4, 6, 8, 9\}$

Unión de conjuntos

A partir de estos dos conjuntos, formemos otro cuyos elementos sean *todos* los elementos de A junto con *todos* los elementos de B. A este nuevo conjunto lo llamaremos C.

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

Observe que en el conjunto C no se escriben sino una vez los elementos comunes a los dos conjuntos.

El conjunto C se denomina unión de A y B, y lo indicaremos así:

$$C = A \cup B$$

La representación gráfica del conjunto C en términos de los conjuntos A y B, aparece en la Figura 1.2.

Ejemplos

1. Sean $E = \{1, 3, 5\}$ y $F = \{2, 4, 6\}$
   entonces $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Sean $G = \{1, 2, 6\}$ y $H = \{1, 2, 3\}$
   entonces $G \cup H = \{1, 2, 3, 6\}$
3. Sean M el conjunto de los enteros positivos pares y N el conjunto de los enteros positivos impares. Entonces $M \cup N$ es el conjunto de todos los enteros positivos.
4. Sean $S = \{x/x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$
   $W = \{x/(x^2 - 4x + 3 = 0)\} = \{1, 3\}$
   entonces $S \cup W = \{x/(x^2 = 9)$ ó $(x^2 - 4x + 3 = 0)\} = \{-3, 1, 3\}$

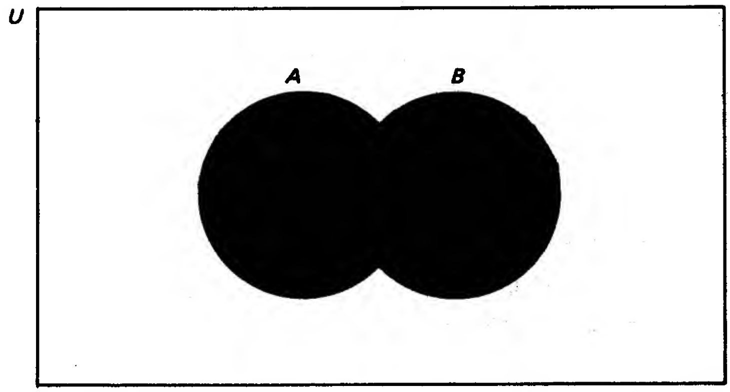


Figura 1.2 $C = A \cup B$: Unión de A y B.

En general

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Aquí ó se usa en el sentido o/y.

Intersección de conjuntos

Nuevamente consideremos los anteriores conjuntos A y B y formemos ahora un conjunto con los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. A este nuevo conjunto lo llamamos D.

$$D = \{3, 4\}$$

El conjunto D se denomina *intersección* de A y B, y lo indicaremos así: $A \cap B$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

La representación gráfica del conjunto D, en términos de los conjuntos A y B, aparece en la Figura 1.3.

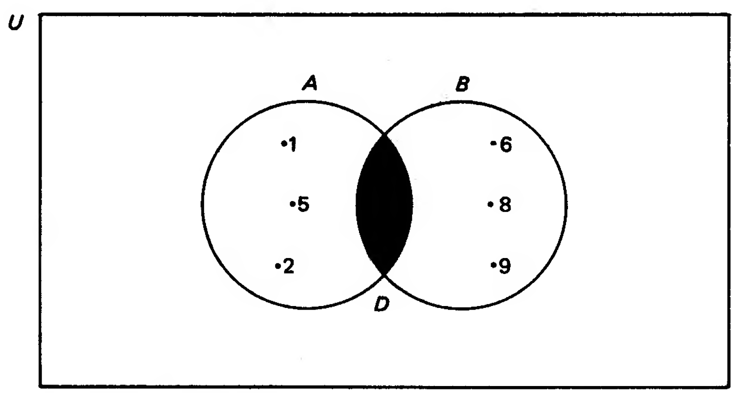


Figura 1.3 $D = A \cap B$: Intersección de A y B.

Ejemplos

1. Sean $E = \{1, 3, 5\}$ y $F = \{2, 4, 6\}$
   entonces $E \cap F = \phi$
2. Sean $G = \{1, 2, 6\}$ y $H = \{1, 2, 3\}$
   entonces $G \cap H = \{1, 2\}$
3. Sean $S = \{x/x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$
   $W = \{x/x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$
   entonces $S \cap W = \{x/(x^2 = 9) \text{ y } (x^2 - 4x + 3 = 0)\} = \{3\}$

En general:

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Si A y B no tienen elementos comunes se dice que A y B son *disyuntos* y se representa $A \cap B = \phi$.

Cuando se realizan operaciones entre conjuntos son posibles únicamente tres casos: a) que los conjuntos sean disyuntos, ($A \cap B = \phi$), b) que un conjunto esté contenido en el otro, ($B \subset A$) o c) que tengan sólo algunos elementos comunes, ($A \cap B \neq \phi$).

Mediante diagramas ilustraremos cada caso (*véase* Figura 1.4).

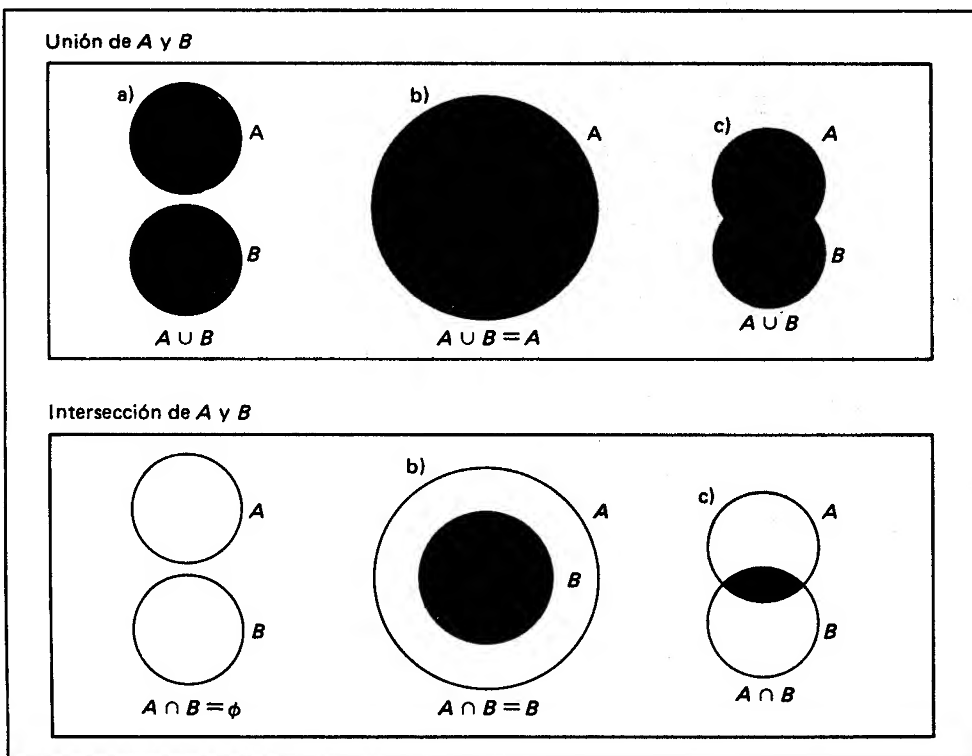


Figura 1.4

Complemento de un conjunto

Supóngase que hemos escogido un conjunto Universal U y que tenemos un subconjunto de U que llamaremos A. Entonces, podemos formar el conjunto que consiste en los elementos de U que no pertenecen a A. A este conjunto lo llamaremos *complemento* de A (con respecto a U) y lo representaremos por A'.

Dado un conjunto universal U y un conjunto A, tal que $A \subset U$, se llama *complemento* de A (y se denota por A') el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.

En general, $A' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$

Ejemplos

1. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   y $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   entonces, $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

   La representación gráfica de A' se muestra en la Figura 1.5

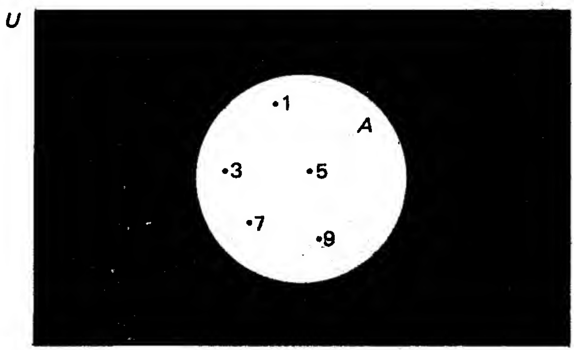


Figura 1.5 A': Complemento de A con respecto a U.

2. Sean U el conjunto de los enteros positivos y A el conjunto de los enteros positivos pares; entonces, A' es el conjunto de los enteros positivos impares.
3. Si $A = U$, entonces $A' = \phi$
4. Si $A = \phi$, entonces $A' = U$
5. $A \cup A' = U$

Diferencia de conjuntos

Ahora consideremos los conjuntos:

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$
$$N = \{a, e, i, o, u\}$$

Formemos el conjunto de los elementos que *pertenecen* a M y *no pertenecen* a N.

Este nuevo conjunto lo notaremos H y lo llamaremos "diferencia"

$H = M - N$

$H = \{b, c, d, f, g\}$

En general:

$M - N = \{x/x \in M \text{ y } x \notin N\}$

Ejemplo 4

Sean $A = \{3, 5, 8, 9, 10\}$

$B = \{4, 6, 8, 11, 12\}$

$A - B = \{3, 5, 9, 10\}$

$B - A = \{4, 6, 11, 12\}$

La representación gráfica de $A - B$ aparece en la Figura 1.6.

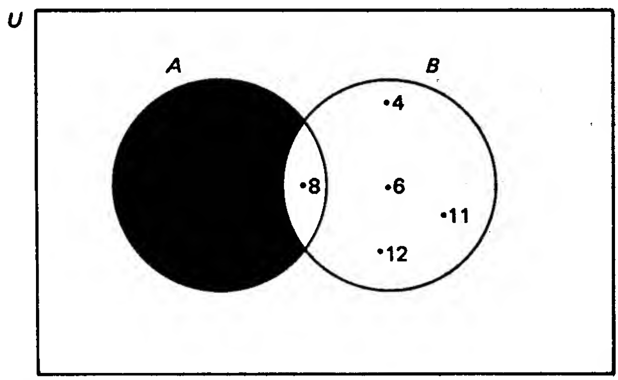


Figura 1.6 *A* − *B*: la diferencia de *A* menos *B*.

1.5 Propiedades de los conjuntos

A continuación presentamos un resumen de las propiedades que se cumplen en las operaciones entre conjuntos.

No creemos necesario hacer la demostración rigurosa de ninguna de estas propiedades. Sin embargo, recomendamos como ejercicio comprobar mediante diagramas de Venn algunas de ellas (como en el ejemplo), pensando en que las pueda necesitar para la solución de ejercicios propuestos más adelante en el texto.

Propiedad idempotente:

$A \cup A = A$ $\qquad\qquad$ $A \cap A = A$

Propiedad conmutativa:

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Propiedad asociativa:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Propiedad de identidad:

$A \cup \phi = A$ $\quad$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $\quad$ $A \cap \phi = \phi$

Propiedad de complementación:

$A \cup A' = U$ $\quad$ $A \cap A' = \phi$

$$(A')' = A$$
$$(U)' = \phi$$
$$(\phi)' = U$$

Propiedad distributiva:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ley de De Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\quad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Otras propiedades:

Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$. $(A \cap B) \subset A$ y $A \subset (A \cup B)$ para cualquier A y cualquier B.

Ejemplo: Demuestre mediante diagramas de Venn que $(A' \cup B')' = A \cap B$. Figura 1.7

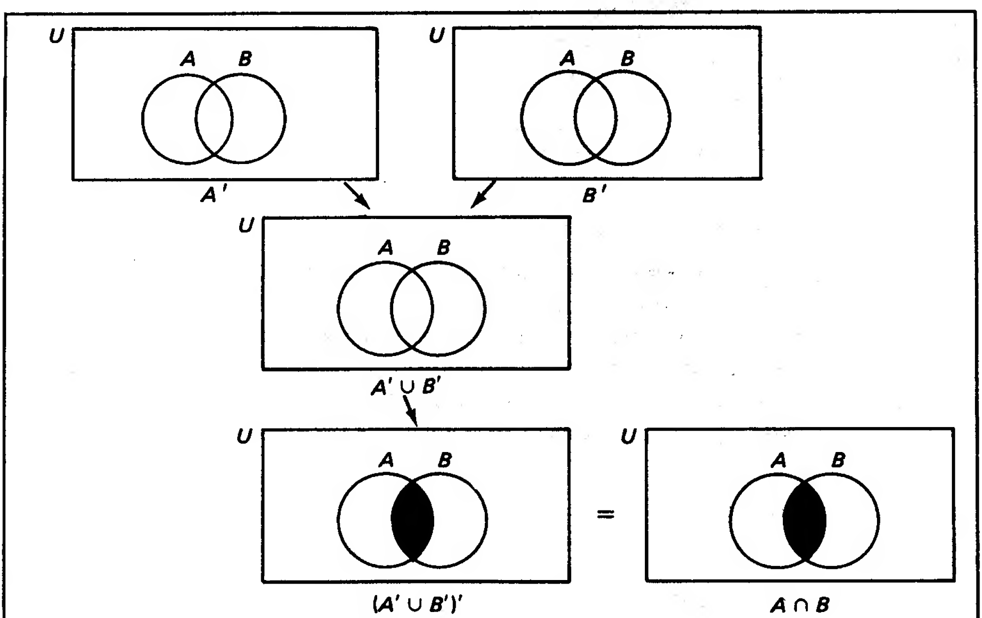


Figura 1.7

1.6 Cardinal de un conjunto

Sea A un conjunto cualquiera, llamaremos "cardinal de A" al número de elementos de A y lo notaremos como $\eta(A)$.

Ejemplos

Si $V = \{x/x$ es estación del año$\}$ entonces $\eta(V) = 4$

Si $P = \{x/x$ es un primo par$\}$ entonces $\eta(P) = 1$

Si $L = \{x/x$ es par menor de $20\}$ entonces $\eta(L) = 9$

Conociendo el cardinal de ciertos conjuntos dados, podemos obtener el cardinal de otros conjuntos que son unión, intersección, diferencia o complementos de los conjuntos dados.

Si tenemos dos conjuntos A y B definimos el cardinal de la unión de estos conjuntos de la siguiente forma:

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$

Si los conjuntos son disyuntos ($A \cap B = \phi$), entonces la relación anterior se reduce a:

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B)$$

Ejemplo 5

Una farmacia rebajó el precio de una loción y el de una crema. La contabilidad al final de un día indicó que 66 personas habían comprado crema; 21, loción y 12 personas ambos productos.

a) ¿Cuántas personas aprovecharon la oferta?
b) ¿Cuántas personas compraron solamente la loción?
c) ¿Cuántas personas compraron solamente la crema?

Solución:

La forma más práctica de solucionar este ejercicio, es mediante el uso de los diagramas de Venn-Euler.

Teniendo en cuenta que hubo personas que compraron ambos productos, el diagrama (Figura 1.8) presenta una región de intersección entre los dos conjuntos a los cuales llamaremos C y L.

$C = \{x/x$ compró crema$\}$

$L = \{x/x$ compró loción$\}$

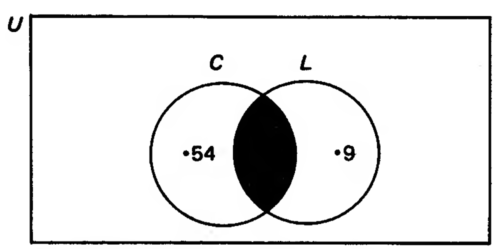


Figura 1.8 Región de intersección entre los dos conjuntos C y L.

Observe que en el anterior diagrama, 12 representa (la intersección) el número de personas que compraron los dos productos y 9 representa el número de personas que únicamente compraron loción ($21 - 12 = 9$). De la misma forma 54 representa el número de personas que únicamente compraron crema ($66 - 12 = 54$).

¿Cuántas personas aprovecharon la oferta?

$$\eta(L \cup C) = \eta(L) + \eta(C) - \eta(L \cap C)$$
$$\eta(L \cup C) = 66 + 21 - 12$$
$$\eta(L \cup C) = 75$$

Lo anterior representa el *cardinal* de la unión entre los conjuntos.

Ejemplo 6

Una encuesta realizada a un grupo de empleados reveló que 277 tenían casa propia; 233, automóvil; 405, televisor; 165, automóvil y televisor; 120, automóvil y casa; 190, casa y televisor y 105 tenían casa, automóvil y televisor.

a) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
b) ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?
c) ¿Cuántas personas tienen solamente casa y televisor?

Solución:

Como habíamos dicho anteriormente, lo más práctico en estos casos es elaborar el diagrama correspondiente (*véase* Figura 1.9).

El número de empleados que poseen los tres servicios, corresponde a la intersección de los tres conjuntos. Este es el dato que debe ubicarse en el gráfico. A partir de este cardinal se colocan los otros cardinales que corresponden a las intersecciones entre los diferentes pares de conjuntos que puedan conformarse.

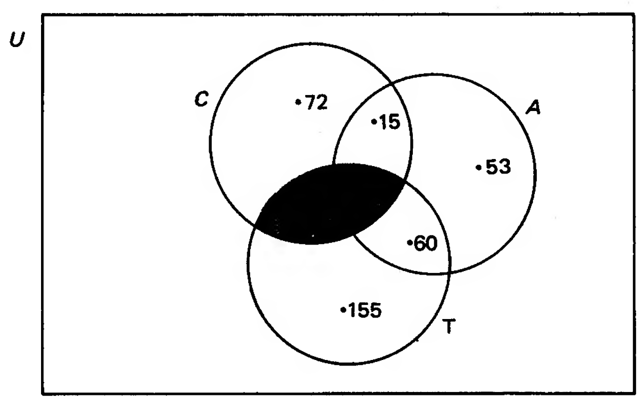


Figura 1.9 Diagrama ejemplo 2.

En la figura C, A y T corresponden a los siguientes conjuntos:

C: $\{x/x$ tienen casa$\}$

A: $\{x/x$ tienen automóvil$\}$

T: $\{x/x$ tienen televisor$\}$

Observe que la suma de los números que se encuentran en la región delimitada por cada conjunto corresponde al cardinal del conjunto.

Por ejemplo, $\eta(C) = 277$, luego

$$277 = x + 15 + 105 + 85, \text{ de donde}$$
$$x = 72$$

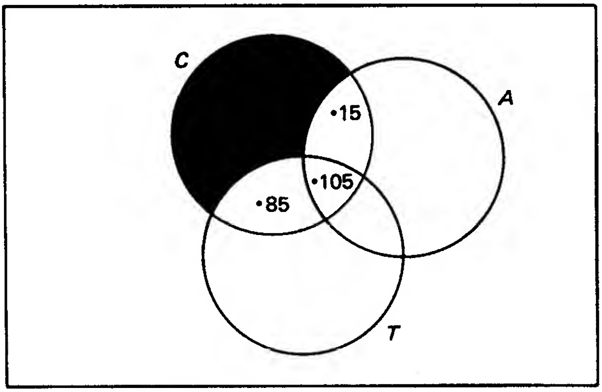


Figura 1.10 Número de personas que sólo tienen casa propia.

a) Para saber cuántas personas fueron encuestadas calculamos el cardinal de la unión de los tres conjuntos.

$$\eta(C \cup A \cup T) = \eta(C) + \eta(A) + \eta(T) - \eta(C \cap A) - \eta(C \cap T) - \eta(A \cap T) + \eta(C \cap A \cap T)$$

$$\eta(C \cup A \cup T) = 277 + 233 + 405 - 120 - 190 - 165 + 105$$
$$\eta(C \cup A \cup T) = 545$$

b) La región sombreada en la Figura 1.9 corresponde al número de personas que solamente tienen casa y televisor ($190 = 105 + 85$) que se obtiene de:

$$\eta(C \cup T) = \eta(C) + \eta(T) - \eta(C \cap T)$$

$$\eta(C \cap T) = 277 + 405 - 492$$

$$\eta(C \cap T) = 190$$

c) La región rayada representa el número de personas que solamente tienen casa propia, es decir, 72 (*véase* Figura 1.10).

1.7 Resumen

Recuerde que:

1. Los conjuntos se representan con letras mayúsculas y sus elementos se encierran entre llaves, separados por comas.

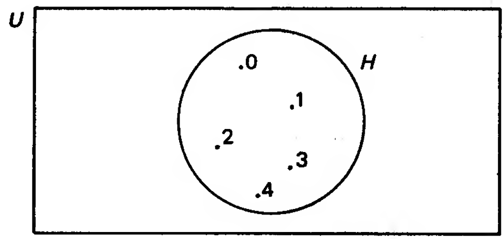
$A = \quad \{1, 2, 3, 4\}$

2. Los conjuntos se pueden escribir por comprensión o por extensión.

$H = \quad \{x \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant x < 5\}$

$H = \quad \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3. Gráficamente un conjunto se puede representar mediante diagramas de Venn.



4. Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces podemos decir que
$2 \in A$ (2 "pertenece a" A)
$5 \notin A$ (5 "no pertenece a" A)

5. Si $T = \{1, 2, 3, 4\}$ y $S = \{2, 4\}$
entonces,

$S \subset T$ (S está contenido en T)
(S es subconjunto de T)

En general, para todo conjunto T, $\phi \subset T$.

6. Si n es el cardinal de A, entonces 2^n expresa el número de elementos del conjunto partes de A, esto es $n\,[\mathcal{P}(A)] = 2^n$.
Para cualquier conjunto A, se tiene que vacío y A pertenecen al conjunto partes de A, es decir, $\phi \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

7. $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$ (A unión B)

$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$ (A intersección B)

$A' \quad = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$ (A complemento)

$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$ (A diferencia con B)

8. Llamamos "cardinal de un conjunto" al número de elementos del conjunto y lo indicamos como $\eta(A)$

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$

1.8 Ejercicios y problemas

1. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son iguales y entre cuáles se puede establecer una relación de contenencia:

$A = \quad \{$economía, mercadotecnia, contaduría$\}$
$B = \quad \{$cebada, trigo, ajonjolí$\}$

C = {Quito, Cali, Lima}
D = {mercadotecnia}
E = {x/x es una ciudad de Latinoamérica}
F = {2, 4, 6, 8}
G = {banano, café, trigo, cebada}
H = {contaduría, economía, mercadotecnia}
I = {x/x es un par menor que 10}
J = {x/x es un dígito}

2. En el siguiente ejercicio escriba todos los subconjuntos del conjunto dado. ¿Cuáles son los subconjuntos propios?

a) $\{2, 9\}$ c) $\{\phi, \{1\}, 1\}$
b) $\{\{2\}, 9\}$ d) $\{\ \}$

3. Dados: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ y $C = \{1, 4, 6, 10\}$ halle:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
c) $(A \cap B)'$ d) $(A \cup C)$
e) $(A \cap B) \cup C$ f) $(A \cup B) \cap C$

4. Realice:

a) {x/x es un entero par} $\cap$ {x/x es un entero impar}
b) $\{a, b, c, d\} \cup \phi$
c) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \phi$
d) {x (persona)/x es un estudiante} $\cup$ {x/x tiene más de 30 años}
e) {x (persona)/x es un estudiante} $\cap$ {x/x tiene más de 30 años}
f) {x (aeroplano)/x es un boeing 747} $\cup$ {x/x pertenece a las líneas aéreas del sur}

5. a) Si U es el conjunto de todos los alumnos de la Universidad Nacional y A es el conjunto de los alumnos de primer año, encuentre A'
b) Para cualquier conjunto A, encuentre $A \cap U$ y $A \cup U$
c) Para cualquier conjunto A, encuentre $A \cap \phi$ y $A \cup \phi$
d) Para cualquier conjunto A, encuentre $A \cap A'$ y $A \cup A'$
e) Dados los conjuntos A y B cualesquiera, ¿es $A \cup B = B \cup A$? ¿por qué? Considérense las mismas preguntas para $A \cap B$.

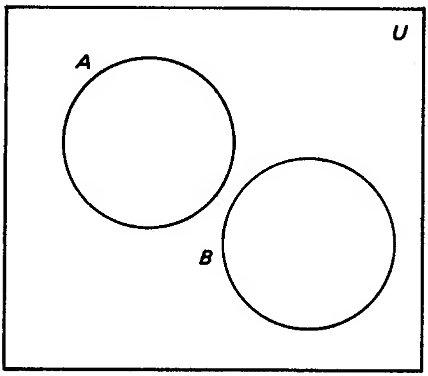
6. En los siguientes ejercicios una de estas relaciones es verdadera: $A \subset B$, $A = B$, $B \subset A$. Escriba, en cada caso, la relación correcta.
El conjunto universal, es el conjunto de todos los enteros.
Relacione cada conjunto del grupo A con el conjunto situado frente en el conjunto B.

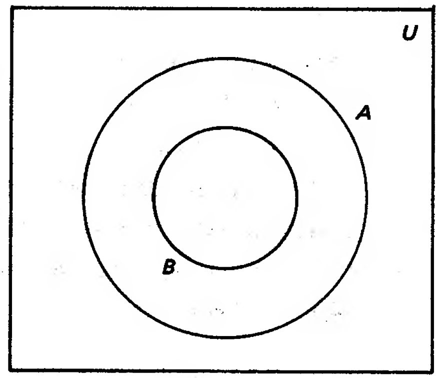
a) $\{x/2x + A\,3 = 11 - 2x\}$	$\{x/5x + B\,4 = x + 12\}$
b) $\{x/x^2 + 4 = 6x - 5\}$	$\{x/4 + 2x = 10\}$
c) $\{x/(x + 4) = 0\}$	$\{x/x\,(x + 4) = 0\}$
d) $\{x/(x - 2)\,(x - 3) = 0\}$	$\{x/x = 2\}$
e) $\{x/x - 1 = 0\} \cup \{x/x - 2 = 0\}$	$\{x/x^2 - 3x + 2 = 0\}$
f) $\{x/x = 3\}$	$\{x/x$ es un entero impar$\}$
g) $\{x/x + 3 = 4\}$	$\{x/(x + 3)^2 = 16\}$
h) $\{x/x^2 = 25\}$	$\{x/x + 2 = 7\}$
i) $\{T$ (triángulos en un plano) $/T$ es equilátero$\}$	$\{T$ (triángulos en un plano) $/T$ es isósceles$\}$
j) El conjunto de los cuadrados en un plano	El conjunto de los rectángulos en un plano

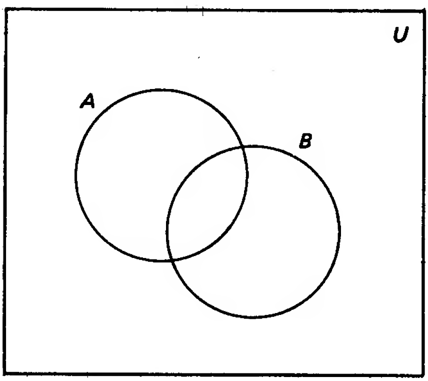
7. En cada uno de los diagramas de Venn, sombree:

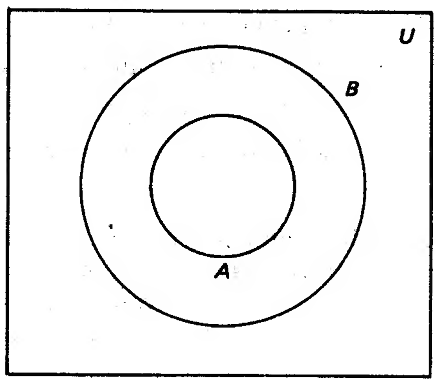
a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

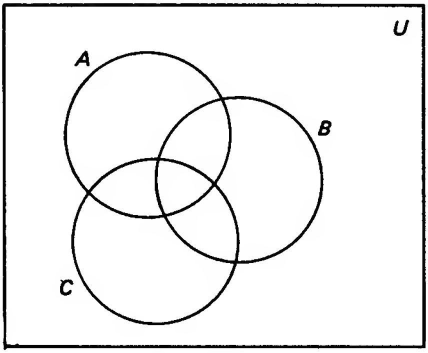




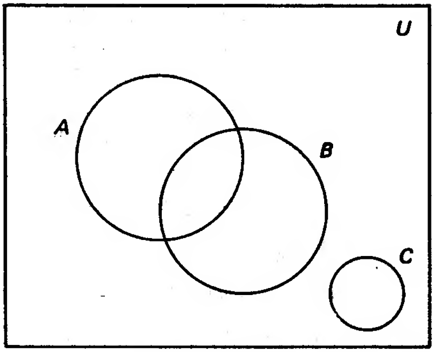




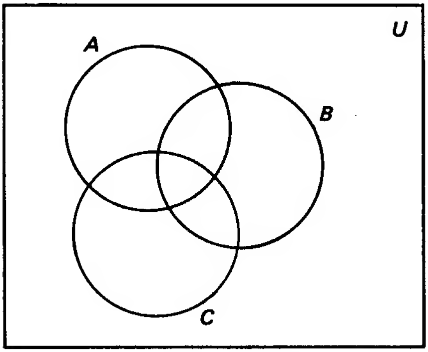
8. En cada diagrama sombree la operación indicada:



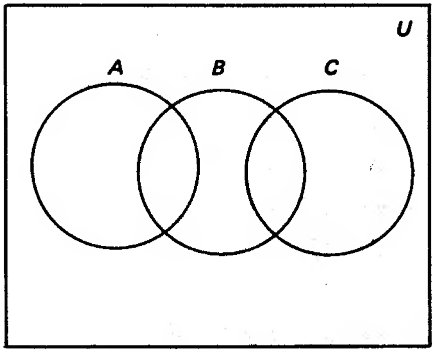
$(A \cup B) \cap C$



$(A \cap B)' \cup C$



$(A \cup B) - (A \cup C)'$



$A \cup (B - C)$

9. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Una mesera tomó una orden de 38 hamburguesas: 18 con cebolla, 23 con mostaza y 29 con salsa de tomate. De éstas, 3 tenían sólo mostaza y 8 sólo salsa; 9 de las hamburguesas tenían sólo mostaza y salsa y 5 los 3 ingredientes. Realice un diagrama de Venn y encuentre:

i) ¿Cuántas hamburguesas llevaban cebolla y salsa solamente?

ii) ¿Cuántas sólo llevaban cebolla?

iii) ¿Cuántas hamburguesas sólo llevaban cebolla y mostaza?

b) En una encuesta realizada en algunos países acerca de los productos de mayor exportación se encontró que: 8 países exportan café; 15, petróleo y 13, frutas; solamente 6 exportan frutas y petróleo; 4, sólo frutas y 3 exportan los 3 productos.

i) ¿Cuántos países fueron encuestados?

ii) ¿Cuántos exportan sólo café?

iii) ¿Cuántos países exportan sólo petróleo?

c) Los siguientes son los datos que muestran la preferencia de algunos alumnos de primer semestre por ciertas asignaturas:
a 36 les gustá matemáticas
a 32 les gusta administración
a 31 les gusta biología
a 16 les gusta administración y biología
a 15 matemáticas y administración
a 14 les gusta matemáticas y biología
y 6 tienen preferencia por las tres.

i) ¿Cuántos alumnos fueron encuestados?

ii) ¿Cuántos alumnos prefieren solamente matemáticas?

iii) ¿Cuántos estudiantes no prefieren biología?

iv) ¿Cuántos estudiantes prefieren matemáticas y biología pero no administración?

10. Sea $A = \{\phi , \{1, 2\}, \{1\}, \{\phi\}, 1, \{2\}\}$
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y por qué?

a) $1 \in A$

b) $2 \in A$

c) $2 \subset A$

d) $\{2\} \in A$

e) $\{2\} \subset A$

f) $\phi \subset A$ y $\phi \in A$

g) $1 \in A$ y $\{1\} \in A$

h) $\eta (A) = 6$

i) $\eta [\wp (A)] = 64$

j) $\{1, 2\} \subset A$

11. En cada caso halle $\wp (M)$

a) $M = \{3, 5\}$

b) $M = \{3, 5, \phi\}$

c) $M = \{\phi, 1, \{1\}\}$

12. Utilizando las propiedades de los conjuntos demuestre que:

a) $(A \cup B') \cap B = A \cap B$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

c) $(A' \cup B)' \cup (A' \cup B')' = A$

13. Partiendo de que $\eta (A \cup B) = \eta (A) + \eta (B) - \eta (A \cap B)$ y de las propiedades de los conjuntos, demuestre que: $\eta (A \cup B \cup C) = \eta (A) + \eta (B) + \eta(C) - \eta (A \cap B) - \eta (B \cap C) - \eta (A \cap C) + \eta (A \cap B \cap C)$

Nota: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$

14. Demuestre que: $[A \cup (B \cap A')] \cup [A' \cap B' \cap C] = A \cup B \cup C$

Referencias

Budnick, Frank S. *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill.

Britton/Bello. *Matemáticas contemporáneas*. Harla.

Lipschutz, Seymour. *Matemáticas finitas*. McGraw-Hill.

Miller, Charles. *Introducción al pensamiento matemático*. Trillas.

CAPITULO **2**

Lógica

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Manejar correctamente las proposiciones y conectivos lógicos.
2. Construir tablas de verdad.
3. Utilizar correctamente el álgebra de proposiciones.
4. Demostrar la validez de los argumentos lógicos.

2.1 Introducción

Fue Aristóteles (384-322 A. C.) el primero en lograr una sistematización de la LOGICA. Mucho tiempo después Leibniz utilizó símbolos matemáticos en su estudio y la desarrolló como un instrumento de la matemática. En el Siglo XIX George Boole realiza un estudio más amplio sobre la lógica simbólica. A comienzos del Siglo XX, con su obra *Principia Mathematica*, Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) redefinen los conceptos básicos de la aritmética en términos de conceptos lógicos estableciendo así un fundamento para las matemáticas puras.

Comprender claramente el álgebra de proposiciones lógicas será el objetivo primordial de este capítulo.

2.2 Proposiciones lógicas

Una proposición lógica es un enunciado del que se puede decir que es verdadero o falso, pero no las dos cosas a la vez.

Ejemplos

- $2 + 3 = 5$
- Bolívar nació en Caracas
- Vacío es subconjunto de cualquier conjunto

Los anteriores enunciados son proposiciones, puesto que cada uno de ellos es verdadero o es falso, sin ninguna duda.

Por el contrario, los enunciados:

- Abra la puerta
- Pinte la pared
- Estudie la lección

no son proposiciones, ya que no son ni verdaderos ni falsos. En todos los casos lo que se da es una orden.

— Margarita es hermosa
— Las matemáticas son difíciles
— El agua está fría

tampoco son proposiciones, porque el ser verdadero o falso depende de los gustos o las circunstancias.

Las proposiciones se representan por las letras minúsculas

p, q, r . . . , así:

p : 2 es un número entero

q : $3 \times 2 = 2 \times 3$

r : . . . todos los caballos son blancos

A la veracidad o falsedad de una proposición lógica se le denomina *el valor de verdad de la proposición.*

Si q: $A \subset A \cup B$, decimos que el valor de verdad de la proposición q es verdadero.

Denotaremos verdadero con la letra V, y falso con la letra F.

Una proposición como

$$p: x + 5 = 8$$

se denomina una proposición abierta, ya que su valor de verdad depende del valor que se le asigne a la variable x.

En las proposiciones abiertas el valor de verdad, denominado conjunto de verdad, es el conjunto de todos los valores de la variable que hacen que la proposición sea verdadera.

Ejemplo 1

Calcular el conjunto de verdad de la proposición p: $x^2 + 3x + 2 = 0$

Como $(2)^2 + 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, y

$$(1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

entonces 2 y 1 son soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, luego el conjunto de verdad de p es $\{1, 2\}$.

2.3 Conectivos lógicos

En el lenguaje diario es usual encontrar expresiones como:

— Si no llueve voy a cine
— Viajaré a Cali o a Medellín
— $3 \times 2 = 6$ y $9 \times 5 \neq 40$

Todos los anteriores enunciados están conformados por dos proposiciones unidas mediante unos símbolos denominados *conectivos.* A estos enunciados se les llama *Proposiciones compuestas.*

La siguiente tabla muestra los diferentes conectivos de la lógica proposicional con su respectivo nombre, símbolo, notación y lectura.

NOMBRE	SIMBOLO	NOTACION	LECTURA
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	$p \underline{\vee} q$	p o q, pero no ambas
Implicación	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	p implica q Si p entonces q
Equivalencia	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	P si y sólo si q p es equivalente a q
Negación	$\sim$	$\sim p$	No p. ; es falso que p

Tabla 2.1 Diferentes conectivos de la lógica proposicional.

Ejemplo 2

Consideremos las siguientes proposiciones p, q y s y formemos con ellas, mediante los conectivos vistos, algunas proposiciones compuestas.

p : Estudio biología

q : Paso la materia

s : Voy a la fiesta

$p \wedge \sim s$: Estudio biología y no voy a la fiesta

$p \vee s$: Estudio biología o voy a la fiesta

$p \rightarrow q$: Si estudio biología entonces paso la materia

$q \leftrightarrow p$: Paso la materia si, y sólo si, estudio biología

Los anteriores enunciados, por ser proposiciones, tienen valores de verdad que se obtienen fácilmente mediante los valores de verdad de cada una de las proposiciones simples.

Ejemplo 3

Consideremos la siguiente proposición:

$$3 \times 3 = 9 \quad \text{y} \quad 2 + 12 = 14$$

es claro que el valor de verdad de la proposición compuesta es *verdadero*. Observe que:

$3 \times 3 = 9$ tiene valor de verdad (v)

$2 + 12 = 14$ tiene valor de verdad (v)

Luego $v \wedge v$ tienen valor de verdad (v)

De la misma manera podríamos obtener el valor de verdad para cada una de las combinaciones de verdadero y falso para la conjunción Λ así:

v	Λ	v	v
v	Λ	f	f
f	Λ	v	f
f	Λ	f	f

2.4 Tablas de verdad

La siguiente tabla muestra los valores de verdad de las proposiciones compuestas para cada uno de los diferentes conectivos.

p	q	$p \Lambda q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
v	v	v	v	f	v	v	f
v	f	f	v	v	f	f	f
f	v	f	v	v	v	f	v
f	f	f	f	f	v	v	v

Tabla 2.2 Valores de verdad de las proposiciones compuestas.

Observe que:

1. La conjunción (Λ) sólo es verdadera cuando las dos proposiciones son verdaderas.
2. La disyunción ($\vee$) sólo es falsa cuando las dos proposiciones son falsas, y
3. La implicación ($\rightarrow$) sólo es falsa cuando el consecuente es falso.[3]

Ejemplo 4

Construir la tabla de verdad de $(p \Lambda \sim p) \rightarrow q$

p	q	$\sim p$	$p \Lambda \sim p$	$(p \Lambda \sim p) \rightarrow q$
v	v	f	f	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

Tabla 2.3

[3] En una proposición compuesta de la forma $p \rightarrow q$, la proposición p se denomina el antecedente y la proposición q se denomina el consecuente.

A continuación detallaremos el procedimiento para la construcción de la tabla anterior (Tabla 2.3):

Como en este caso intervienen dos proposiciones, el total de combinaciones que se consideran es cuatro. En términos generales, el total de combinaciones para una tabla es 2^n, en donde n es el número de proposiciones.

Para facilitar el desarrollo del ejercicio, se procura conservar un orden en la disposición de los valores de verdad dentro de la tabla, empezando en este caso así: 2 verdaderos (v), dos falsos (f) para la primera proposición, y una verdadera (v) y una falsa (f) intercaladas para la segunda proposición. A continuación se hallan los valores de verdad de las diferentes proposiciones compuestas que se puedan establecer utilizando la Tabla 2.2.

Observe que en la última casilla los valores obtenidos son todos verdaderos. En este caso decimos que la proposición es una *Tautología*.

Ejemplo 5

Construya la tabla de verdad de: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

Tabla 2.4

Observemos que nuevamente hemos obtenido una tautología.

Ejemplo 6

Construya la tabla de verdad de: $[(r \wedge s) \rightarrow q] \leftrightarrow [(s \wedge \sim q) \rightarrow \sim r]$

q	r	s	$\sim q$	$\sim r$	$r \wedge s$	1 $(r \wedge s) \rightarrow q$	$(s \wedge \sim q)$	2 $(s \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$	1 $\leftrightarrow$ 2
v	v	v	f	f	v	v	f	v	v
v	v	f	f	f	f	v	f	v	v
v	f	v	f	v	f	v	f	v	v
v	f	f	f	v	f	v	f	v	v
f	v	v	v	f	v	f	v	f	v
f	f	v	v	v	f	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f	v	f	v	v
f	f	f	v	v	f	v	f	v	v

Tabla 2.5

Los ejemplos anteriores corresponden únicamente a tautologías, pero podría darse el caso de que en la última columna sólo se presenten valores falsos; diríamos entonces que la proposición es una contradicción o una falacia. Cuando en la última columna aparecen falsos y verdaderos, la proposición se denomina una indeterminación.

2.5 Leyes de las proposiciones lógicas

Ley conmutativa:

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ $\qquad$ $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

Ley asociativa:

$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Ley distributiva:

$(p \wedge q) \vee r \quad = \quad (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$(p \vee q) \wedge r \quad = \quad (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Ley de De Morgan:

$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\qquad$ $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Otras leyes:

$p \vee \sim p \leftrightarrow$ verdad $\qquad$ $p \wedge \sim p \leftrightarrow$ contradicción

$N \sim (\sim p) \leftrightarrow p$

$p \vee p \leftrightarrow p$ $\qquad$ $p \wedge p \leftrightarrow p$

Leyes de implicación:

$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$
$p \wedge (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge q$

Estas son las propiedades más importantes; sin duda, podríamos hacer una lista mucho más extensa.

Ejemplo 7

Como ejercicio demostraremos una de las propiedades anteriores, utilizando las tablas de verdad.

Demostrar que $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	q	$\sim p \vee q$	1 $\leftrightarrow$ 2
v	v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	f	f	v
f	v	v	v	v	v	v
f	f	v	v	f	v	v
		1			2	

Tabla 2.6

2.6 Argumentos lógicos

Un argumento lógico es un razonamiento en el que a partir de una serie de enunciados llamados premisas se obtiene un resultado llamado *conclusión*. Se dice que un argumento es válido si asumiendo que todas las premisas son verdaderas la conclusión también lo es. Si un razonamiento no es válido se dice que es un sofisma o una falacia.

Ejemplo 8

1. Verifique el siguiente argumento:

$$\begin{cases} p_1 & : \quad p \to q \\ p_2 & : \quad \sim r \to \sim q \\ q & : \quad p \to r \end{cases}$$

Para demostrar la validez de un argumento debemos partir del hecho de que tenemos las proposiciones $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$, y tratar de llegar a la conclusión q por medio de las leyes de las proposiciones, así.

$p_1 : \; p \to q \wedge p_2 : \sim r \to \sim q$ es equivalente

$p_1 : \; p \to q \wedge p_2 : \; q \to r$ (por ley de implicación)

luego: $p \to q \wedge q \to r$ se obtiene $p \to r$

que era lo que queríamos concluir. Que $\sim r \to \sim q$ sea equivalente a $q \to r$ es el paso *esencial* de la demostración.

El éxito de las demostraciones estará en el eficaz cumplimiento de estos pasos.

2. Demuestre la validez del siguiente argumento:

$$\begin{cases} p_1 & : \quad p \to q \\ p_2 & : \quad \sim q \vee r \\ q & : \quad p \to r \end{cases}$$

En este caso es esencial notar que $\sim q \vee r$ es equivalente a $q \to r$.

Por tanto $(p \to q) \wedge (\sim q \vee r)$ puede ser escrito como $(p \to q) \wedge \sim q \vee r$ por tanto $p \to r$, que era lo que queríamos concluir.

3. Escriba en forma simbólica y demuestre la validez del siguiente argumento:

Si 3 es impar, entonces 2 no divide a 9
7 no es primo o 2 divide a 9
7 es primo
luego 3 es par

Sean p : 3 es un número impar
q : 2 divide a 9
r : 7 es primo

Luego el anterior argumento se puede escribir así:

p_1 : $p \to \sim q$

p_2 : $\sim r \vee q$

p_3 : r

q : $\sim p$

Como en el ejercicio anterior $\sim r \vee q$ es equivalente a $r \to q$, las premisas serían.

p_1 : $q \to \sim p$

p_2 : $r \to q$

q_3 : r

que pueden reescribirse

p_1 : $q \to \sim p$

p_2 : $r \to q$

q_3 : r

y tendríamos: $r \wedge (r \to q) \wedge (q \to \sim p)$

luego $r \to \sim p$, que era lo que queríamos demostrar.

2.7 Cuantificadores

Una proposición cuantificada es aquella en la que se sabe cuántos elementos la satisfacen.

Ejemplos

1. Todos los enteros son racionales
2. Existe un x, tal que $x + 5 = 12$
3. Ningún gato es blanco
4. Todos los animales son mamíferos
5. Ningún caballo vuela

Las palabras *todos*, *existe un*, *ningún*, que nos dicen *cuántos*, se denominan *cuantificadores*. Los cuantificadores se dividen en universales y existenciales.

Cuantificadores universales:

El cuantificador universal es "todos" y se representa por el símbolo $\forall$.

La expresión, $\forall x$, $x \in \mathbb{Z}$, significa que para todo x (para cualquier x), x es un elemento del conjunto $\mathbb{Z}$.

Cuantificadores existenciales:

El cuantificador existencial es "existen algunos" y se representa con el símbolo $\exists$.

La expresión $\exists x / \quad x + 3 = 8$, significa que existe algún x tal que $x + 3 = 8$.

Una proposición cuantificada también tiene su valor de verdad, verdadero o falso.

Negación de cuantificadores en proposiciones cuantificadas:

$$\sim (\forall x, x) \longleftrightarrow \exists x / \sim x$$

$$\sim (\exists x / x) \longleftrightarrow \forall x, \sim x$$

Ejemplo 9

Negar las siguientes proposiciones:

1. Todos los números son racionales
2. Algunas mujeres son altas

Las respectivas negaciones serían:

1. Existe al menos un número que no es racional
2. No todas las mujeres son altas

2.8 Resumen

Recuerde que:

1. Proposición: es un enunciado del que se puede decir que es verdadero o falso.
2. El valor de verdad de una proposición es la veracidad o falsedad de ésta.
3. Conectivos lógicos.

Disyunción ($\vee$)

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Conjunción ($\wedge$)

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Implicación ($\rightarrow$)

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Equivalencia ($\longleftrightarrow$)

p	q	$p \longleftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

4. Si los valores de verdad obtenidos en una tabla son todos verdaderos se dice que la proposición compuesta es una *tautología*. En el caso en que

los valores de verdad sean todos falsos se le denomina *falacia* o contradicción.

5. Un razonamiento lógico es un razonamiento en el cual a partir de una serie de enunciados llamados *premisas*, se obtiene un resultado llamado *conclusión*.

Ejemplo 10

Si llueve, Enrique se enfermará
Enrique no se enfermó, luego no llovió

p : llueve
q : Enrique está enfermo
$p \to q$, $\sim q$ entonces $\sim p$ (razonamiento válido)

6. Una proposición en la que se sabe cuántos elementos la satisfacen, decimos que es una proposición cuantificada.

   $\forall$ se lee "para todo" y es el cuantificador universal.

   $\exists$ se lee "existen algunos" y es el cuantificador existencial.

2.9 Ejercicios y problemas

1. Determine el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados:
   a) Si $3 < 5$, entonces $-3 < -5$
   b) Si $2 + 2 = 4$, entonces $3 + 3 = 7$ si, y sólo si, $1 + 1 = 4$
   c) $\sqrt{16} = 4$ ó $\sqrt{16} = -4$
   d) $6 + 4 = 10$ y $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$
   e) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$ y $4 + 4 = 8$
   f) $5^2 = 25$ ó $3 \cdot 3 = 9$
   g) Si $2 + 2 = 4$, entonces no es cierto que $2 + 1 = 3$ y $5 + 5 = 10$
   h) $2 + 5 = 7$ si, y sólo si, $3 + 6 = 9$
   i) Si $3 - 1 = 2$, entonces $2 + 2 = 4$
   j) $5 + 1 = 8$ si, y sólo si, $5 - 1 = 2$

2. Construya la tabla de verdad de:
   a) $(p \to q) \to (p \land q)$
   b) $\sim p \to (q \to p)$
   c) $(p \to q) \lor \sim (p \leftrightarrow \sim q)$
   d) $[(p \to q) \land p] \Rightarrow q$

3. Determine a qué corresponde, (falacia o tautología) cada una de las siguientes proposiciones:
   a) $(p \land q) \land \sim (p \lor q)$
   b) $[(p \land q) \land s] \leftrightarrow [p \land (q \land s)]$

4. Construya la tabla de verdad apropiada para demostrar:

a) $(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow \sim p \wedge q$

b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

c) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p$

d) $[\, p \rightarrow (q \rightarrow r)\,] \Leftrightarrow [\,(p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q\,]$

5. Demuestre utilizando las tablas que:

$[\, p \rightarrow (q \wedge r)\,] \Leftrightarrow [\,(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\,]$

Esto es, que la implicación cumple la distributiva respecto a la conjunción.

6. Compruebe la validez de cada uno de los siguientes argumentos:

Si trabajo no puedo tomar clases de música
trabajo o apruebo biología
Aprobé biología
Por tanto, tomé clases de música

7. Julio César, que siempre dice la verdad, le ha contado a su amigo Iván lo siguiente: "Me gusta Liliana o Victoria, pero no ambas. Además, si me gustara Liliana, me gustaría también Victoria". ¿Quién le gusta realmente a Julio César?

8. Exprese en forma simbólica y niegue las siguientes proposiciones, utilizando el cuantificador apropiado:

a) Existen enteros tales que $x^2 - 1 = 0$

b) Ningún conjunto es subconjunto de vacío

c) -5 es un número racional

d) A todos los alumnos de secundaria les gusta los deportes

e) En todos los números naturales x, $-x$ es menor que cero

f) Existe un racional de la forma a/b tal que $a/b - 1$ es negativo

g) Algunos mamíferos son acuáticos

9. Niegue la siguiente proposición: $[\,(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow [s \vee (q \wedge t)]$.

Referencias

Lipschutz, Seymour. *Matemáticas finitas.* McGraw-Hill.
Turner/Prouse. *Introducción a las matemáticas.* Trillas.
Britton/Bello. *Matemáticas contemporáneas.* Harla.

CAPITULO **3**

Números

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Clasificar un número en el conjunto al que pertenece, según sus características.
2. Resolver ejercicios sobre operaciones binarias.
3. Aplicar las propiedades de los números reales en la solución de ejercicios.
4. Resolver ejercicios con valor absoluto.

3.1 Introducción

Medir y contar fueron probablemente las primeras actividades de tipo matemático que realizó el hombre. Debieron pasar muchos siglos para que el hombre obtuviera un concepto abstracto de número. Fue G. Frege quien a finales del presente siglo asoció el concepto de número natural a la teoría de conjuntos.

Las funciones eran conocidas por los babilonios, según muestran tablillas uniformes del Siglo 2000 A.C. Los números irracionales se atribuyen a Pitágoras (572-497 A.C.), quien estableció la relación entre los catetos de un triángulo y su hipotenusa en su famoso teorema. Más tarde, Teodoro de Cirene demostró la irracionalidad de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ . . . Los números negativos fueron estudiados por muy pocos matemáticos de la antigüedad e incluso fueron rechazados en la edad media. Sólo hasta el Siglo XVI, Harriot introdujo el signo (—) para caracterizar los números negativos.

Los números complejos se deben a Bombelli, italiano del Siglo XVI, a quien se tiene como un precursor; sin embargo, fue el danés C. Wessel quien dio una interpretación geométrica de los mismos representándolos como un punto del plano.

Dedicaremos este capítulo al análisis de las propiedades y características más importantes de los números.

3.2 Sistemas numéricos

Podemos considerar un sistema numérico como un conjunto que por tener ciertas características y cumplir determinadas propiedades recibe un nombre específico.

El conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ cuyos elementos son utilizados para contar, recibe el nombre de números naturales y se representa por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Al conjunto $\mathbb{N}o = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$[4] se le denomina conjunto de los enteros no negativos. A la *unión* de este conjunto con el conjunto de los enteros negativos $\ldots -4, -3, -2, -1$ se le llama conjunto de los *enteros* y se representa por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}o \cup \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observe que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}o \subset \mathbb{Z}$.

Al conjunto $\{p/q \ / \ p \text{ y } q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$ se le denomina conjunto de los números racionales y lo representaremos por $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\ldots, -2, -3/2, -1/3, 0, 1/8, 2/7, 4, \ldots\}$$

En este conjunto podemos diferenciar dos subconjuntos:

i) El de las fracciones propiamente dichas, como por ejemplo $-3/2, -1/3, 1/8, 2/7$.
ii) El de los enteros, como por ejemplo $-2, 0, 4$.

Los números racionales tienen, además, la característica de poder ser representados como un decimal infinito periódico, así:

$$-2 = -2.00 = -2.\overline{0}$$
$$-3/2 = -1.500 = -1.5\overline{0}$$
$$2/7 = 0.285714285714 = \overline{0.285714}$$
$$-1/3 = 0.333333333333 = 0.\overline{3}$$

En todos los casos anteriores existe en la representación decimal una parte que se repite, que se denomina parte periódica. Se acostumbra escribir los números con la parte periódica expresada una sola vez, colocando sobre ella una barra.

No todos los números pueden expresarse como decimales infinitos periódicos; por ejemplo al número

$\pi = 3{,}141592654\ldots$ no se le conoce período.

En 1973, utilizando un computador IBM CDC 7.600, Jean Guillond y Martine Bouyer llegaron a establecer un millón de cifras decimales para π sin encontrar un período.

A los números decimales que, como π, son NO periódicos, se les denomina números *irracionales*. Son también números irracionales: $e = 2.718281$[5], $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y en general todas las raíces no exactas de números enteros.

Al conjunto conformado por la unión de los números racionales y los irracionales se le llama conjunto de los números reales, y se representa por $\mathbb{R}$.

[4] Denotaremos por $\mathbb{N}o$ el conjunto de los números naturales que incluye al cero.

[5] El número e es la base de los logaritmos naturales.

Existe otro sistema numérico conformado por números de la forma $a + bi$, en donde a y b son reales e i representa a $\sqrt{-1}$ ($i = \sqrt{-1}$). Este conjunto se denomina conjunto de los números complejos[6], en donde a se llama la parte real y b la parte imaginaria.

Ejemplo 1

Son números complejos $2 + 3i$, $5 - 7i$, $\frac{1}{3} - i$.

En la Figura 3.1 se muestran las diferentes clases de números y las relaciones que existen entre ellos.

3.3 Operaciones binarias

Las operaciones usuales de la aritmética, tales como $2 + 3 = 5$, $4 \times 5 = 20$, $8 - 6 = 2$ y $10 \div 5 = 2$, se llaman operaciones binarias porque, si escogemos dos números cualesquiera, la operación genera un tercer número. Esto es, hay dos elementos integrantes y un resultado. La unión y la intersección de conjuntos, $A \cup B = C$ y $A \cap B = C$, son ejemplos de operaciones binarias en los conjuntos.

Una manera más formal de definir una operación binaria es la siguiente: Sea $S = \{a, b, c, \ldots\}$ un conjunto cualquiera. La operación * es una operación binaria en S si, y solamente si, a cada par ordenado (a, b)[7], donde a y b son

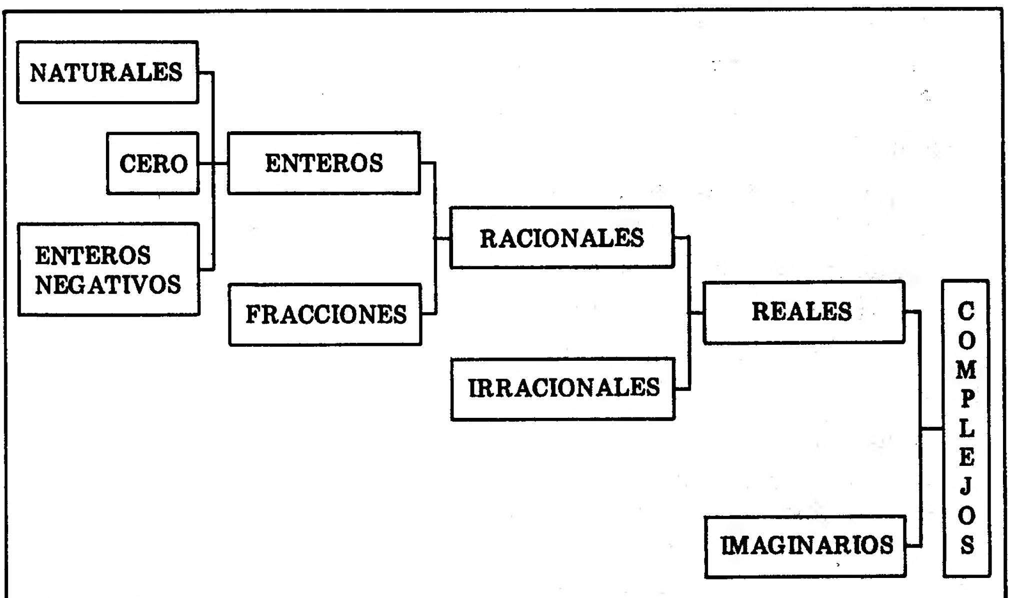


Figura 3.1 Sistemas numéricos.

[6] En un capítulo posterior mostraremos su utilidad.

[7] *Véase* Plano Cartesiano, en el presente capítulo.

elementos de S, le corresponde un elemento único $a * b$ de S. Indicamos esta correspondencia mediante la notación

$$(a, b) \to (a * b)$$

En esta definición hay varios puntos que se deben observar con especial cuidado:

1. El orden de a y b es importante porque (a, b) es un par ordenado. Así, $a * b \neq b * a$.
2. La operación tiene que estar definida para todos los pares (a, b), donde a y b son elementos de S.
3. El elemento resultante $a * b$ tiene que ser un elemento de S.

Ejemplo 2

Sea $S = \mathbb{N}o = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

a) Si $* = +$, entonces $(3, 4) \to 7$
   que usualmente escribimos $3 + 4 = 7$
b) Si $* = \times$, entonces $(2, 5) \to 10$
   que escribimos $2 \times 5 = 10$
c) Si $* = -$, entonces $(2, 5) \neq (5, 2)$
   dado que $2 - 5 \neq 5 - 2$
d) Si $* = -$, entonces $(7, 10) \to -3$. Como $-3 \notin \mathbb{N}o$, entonces la operación $* = -$ sobre $\mathbb{N}o$, *no* es una operación binaria.
e) Si $* = \div$, entonces $(4, 0) \to 4/0$. Como $4/0$ *no* está definido, luego sobre $\mathbb{N}o$ $* = \div$ tampoco es una operación binaria.

Ejemplo 3

a) Sea S el conjunto de los números reales R. Entonces, sabemos que
   la adición: $(a, b) \to (a + b)$
   la multiplicación: $(a, b) \to (a \times b)$
   la sustracción: $(a, b) \to (a - b)$
   son operaciones binarias en $\mathbb{R}$.
b) Por el contrario,
   la división: $(a, b) \to (a \div b)$
   no es una operación binaria en $\mathbb{R}$ porque $(a, 0) \to (a \div 0)$ no está definida. No obstante, la división es una operación binaria en los números reales diferentes de cero.
c) Sea S el conjunto de los subconjuntos de un conjunto universal U. Entonces,
   la unión: $(A, B) \to (A \cup B)$
   la intersección: $(A, B) \to (A \cap B)$
   son operaciones binarias en S.

Observe que * no representa necesariamente las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división, sino que podría representar otras más.

Ejemplo 4

1. Sea $a * b = 2a + 3b$, entonces

   $(3, 4) \to 18$, que se obtiene así:

   $$\begin{aligned}(3, 4) &= 2 \times 3 + 3 \times 4\\ &= 6 + 12\\ &= 18\end{aligned}$$

2. Sea $a * b = \frac{1}{2} a + b$, entonces

   $$\begin{aligned}6 * 3 &= \frac{1}{2}(6) + 3\\ &= 3 + 3\\ &= 6\end{aligned}$$

Propiedades de las operaciones binarias

Propiedad conmutativa: Es importante el orden en que se efectúa una operación binaria; el cambio de orden produce, algunas veces, resultados diferentes.

La operación binaria * es conmutativa en un conjunto S si, y solamente si, para cada par ordenado (a, b) de elementos de S,

$$a * b = b * a$$

Ejemplo 5

1. Sea S el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Entonces, la adición y la multiplicación son conmutativas en $\mathbb{R}$ porque, para todos a y b,

   $$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \times b = b \times a$$

2. La sustracción no es conmutativa en $\mathbb{R}$ porque por ejemplo, $8 - 2 \neq 2 - 8$.

Propiedad asociativa: Una operación binaria definida en un conjunto S nos permite combinar dos elementos de S y obtener un tercer elemento de S. Sin embargo, no nos dice cómo combinar tres elementos de S tales como $a * b * c$. Por esta razón introduciremos la propiedad asociativa de una operación binaria y demostraremos que si la operación posee esta propiedad, entonces podemos dar un significado al símbolo $a * b * c$.

Para introducir el concepto de asociatividad tomaremos como ejemplo la adición de números reales. Si escribimos los números 2, 5 y 8 en este orden: 2, 5, 8, queremos encontrar el valor de

$$2 + 5 + 8$$

La adición es una operación binaria, es decir, que podemos sumar únicamente dos números cada vez. Sin embargo, podemos calcular $2 + 5 + 8$ agrupando

$$(2 + 5) + 8$$

Ahora sumamos $2 + 5 = 7$, y después $7 + 8 = 15$. Parece, pues, que

$$2 + 5 + 8 = 15$$

Es posible agrupar los sumandos de otro modo:

$$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

Estos resultados sugieren que los dos modos de agrupar los sumandos producen siempre el mismo resultado. De hecho, es verdadero que para números reales cualesquiera a, b y c

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Esta expresión establece la propiedad asociativa de la operación binaria de la adición.

La definición de una operación binaria asociativa es la siguiente: La operación binaria $*$ es asociativa en un conjunto S si, y solamente si, para cada terna de elementos a, b y c de S

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Ejemplo 6

1. La adición y la multiplicación son operaciones binarias asociativas en $\mathbf{R}$.
2. La sustracción no es asociativa en $\mathbf{R}$ porque, por ejemplo,

$$(12 - 8) - 2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 12 - (8 - 2) = 6$$

3. La división no es asociativa en R porque, por ejemplo,

$$(24 \div 6) \div 2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 24 \div (6 \div 2) = 8$$

Ahora que ya conocemos el significado de la propiedad asociativa, volvamos a nuestro problema original, es decir, encontrar un significado a la expresión $a * b * c$ donde a, b y c son elementos del conjunto S, en el cual está definida $*$ como una operación binaria. Si $*$ es asociativa, es razonable definir que $a * b * c$ es igual a cualquiera de las expresiones $(a * b) * c$ ó $a * (b * c)$. La definición formal es la siguiente:

Sea $*$ una operación binaria asociativa en un conjunto S y sean a, b y c elementos cualesquiera de S,tomados en este orden: a, b, c. Entonces, por definición, la expresión $a * b * c$ es igual a cualquiera de las dos expresiones $(a * b) * c$ y $a * (b * c)$.

Observación: La definición de $a * b * c$ depende del orden en que se escriban a, b y c. Así, no aseguramos que $a * b * c = b * a * c = b * a * c$, aunque es posible que esta igualdad se verifique en algunos casos especiales.

Ejemplo 7

1. Puesto que la adición es asociativa en $\mathbb{R}$, definimos $a + b + c$ como igual a cualquiera de las expresiones $(a + b) + c$ ó $a + (b + c)$.
2. Del mismo modo, definimos $a \times b \times c$ como igual a cualquiera de las expresiones $(a \times b) \times c$ ó $a \times (b \times c)$.
3. Puesto que la sustracción y la división no son asociativas, las expresiones $12 - 6 - 3$ y $24 \div 6 \div 2$ no están claramente definidas. Sin embargo, las propiedades R6 y R7 eliminarán esta dificultad.

3.4 Propiedades de los números reales

Como mencionamos anteriormente, un número real es un número que se puede representar por una expresión decimal infinita.

Aunque un número real es un objeto matemático bien definido, podemos, sin embargo, representarlo de muchas maneras. Por ejemplo, podemos escribir 7 de las siguientes maneras:

$$\text{VII}, \quad 111_{\text{dos}} \quad (\text{base dos}), \quad \frac{21}{3}, \quad 7{,}000\ldots, 9 \quad - \quad 2$$

El número racional que generalmente se expresa por $\frac{1}{2}$ se puede representar también por

$$\frac{2}{4}, \quad \frac{8\pi}{16\pi}, \quad 0{,}5000\ldots, \quad \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Para escribir un número real se suele utilizar la forma "más sencilla" (7 y $\frac{1}{2}$ en los ejemplos anteriores); pero cuando sea conveniente, no dudaremos en utilizar otras representaciones.

Puesto que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ no son más que nombres del mismo número, diremos que son iguales y escribiremos

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

De manera más general, definimos la igualdad de símbolos que representan números reales, como sigue: dos símbolos, a y b, que representan números reales son iguales si, y solamente si, representan el mismo número real.

En esta sección examinaremos sistemáticamente las propiedades aritméticas de los números reales. Basaremos nuestra discusión en las propiedades de la adición y de la multiplicación, y de ellas derivaremos las propiedades de la sustracción y la división. Comenzaremos repitiendo propiedades estudiadas en la sección anterior.

R1 La adición y la multiplicación son operaciones binarias en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

R2 La adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

R3 La adición y la multiplicación son operaciones asociativas.

Las dos proposiciones siguientes comprenden los elementos neutros aditivo y multiplicativo.

Una operación binaria definida sobre S tiene un elemento neutro, denotado por e, si y solamente si, e es un elemento de S y para todo elemento a de S,

$$a * e = a \quad \text{y} \quad e * a = a$$

y, además, e es el único elemento de S que verifica estas igualdades.

Puesto que sabemos que para cualquier número real a,

$$a \times 1 = a \quad \text{y} \quad 1 \times a = a$$

se sigue que el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación.

Luego tenemos estas propiedades:

R4 Los números reales tienen un elemento neutro aditivo único, el cero.

R5 Los números reales tienen un elemento neutro multiplicativo único, el uno.

Las dos propiedades siguientes se refieren a los elementos inversos:
Si $*$ es una operación binaria definida sobre S que tiene un elemento neutro e, y si a es un elemento dado de S, entonces el elemento a^{-1} de S es el inverso de a (respecto a la operación $*$) si, y solamente si,

$$a * a^{-1} = e \quad \text{y} \quad a^{-1} * a = e$$

y si, además, a^{-1} es el único elemento de S que verifica estas igualdades.

Observación: La notación a^{-1} es la que se suele usar para representar los inversos. Sin embargo, es posible que exista alguna confusión porque se puede considerar que -1 es un exponente negativo. Hay que tener cuidado de no caer en este error porque a^{-1} no tiene otra interpretación distinta a la que se le dio en la definición anterior y, así, -1 no es un exponente según el significado usual de esta palabra.

En la adición es fácil encontrar el inverso aditivo de cualquier número real porque, por ejemplo:

El inverso aditivo de 3 es -3 porque

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

El inverso aditivo de -4 es 4 porque

$$-4 + 4 = 4 + (-4) = 0$$

El inverso aditivo de 0 es 0 porque

$$0 + 0 = 0$$

Los inversos aditivos también se llaman "opuestos". El opuesto de a se denota por $-a$. El opuesto de $(-a)$ es $-(-a)$; ahora bien, puesto que $a + (-a) = 0$, se sigue que $-(-a) = a$.

Del mismo modo, tampoco existe dificultad alguna con los inversos multiplicativos de la mayor parte de los números reales. Por ejemplo:

El inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$ porque

$$5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 5 = 1$$

El inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$ porque

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

El número real cero, sin embargo, no tiene inverso multiplicativo. Supóngase que a fuera un inverso multiplicativo de 0. Entonces, tendríamos que $0 \times a = 1$. Ahora bien, $0 \times a = 0$. Por tanto el número real cero carece de inverso multiplicativo. El inverso multiplicativo de a ($\neq 0$) se escribe $\frac{1}{a}$.

Tenemos así las dos propiedades siguientes:

R6 Todo número real a tiene un inverso aditivo único: $-a$.

R7 Todo número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo único $\frac{1}{a}$.

La existencia de estos inversos nos permite definir la sustracción y la división en términos, respectivamente, de la adición y de la multiplicación:

Definición de sustracción y división:

1. La diferencia $a - b$ de dos números reales se define por la igualdad

$$a - b = a + (-b)$$

2. El cociente $a \div b$ (donde $b \neq 0$) de dos números reales se define por la igualdad

$$a \div b = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$$

Observaciones

1. Puesto que el cero carece de inverso multiplicativo, la división por cero no está definida.
2. Como una extensión de la definición de sustracción, es costumbre definir $a - b - c$ como $a + (-b) + (-c)$, y a esta expresión se le pueden aplicar las propiedades de la adición. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 12 - 6 - 3 = 12 + (-6) + (-3) &= [12 + (-6)] + (-3) \\ &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned} 12 - 6 - 3 &= 12 + [(-6) + (-3)] \\ &= 12 + (-9) \end{aligned}$$

$$= 12 - 9$$
$$= 3$$

Como una extensión más, tenemos lo siguiente: cualquier sucesión de adiciones y sustracciones, como $a - b + c + e - f - g$, se define igual a la suma

$$a + (-b) + c + e + (-f) + (-g) = (a + c + e) - (b + f + g)$$

así,

$$\begin{aligned} 15 - 6 + 10 + 3 - 4 - 8 &= (15 + 10 + 3) - (6 + 4 + 8) \\ &= 28 - 18 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Del mismo modo, $a \div b \div c$ se define como $a \times \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{c}$. Así, por ejemplo, $24 \div 6 \div 2 = \left(24 \times \dfrac{1}{6}\right) \times \dfrac{1}{2} = 2$. Además, $a \div b \times c \times e \div f \div g$ se define como

$$a \times \left(\frac{1}{b}\right) \times c \times e \times \left(\frac{1}{f}\right) \times \left(\frac{1}{g}\right) = \frac{a \times c \times e}{b \times f \times g}$$

así,

$$12 \div 3 \times 5 \times 6 \div 4 \div 10 = \frac{12 \times 5 \times 6}{3 \times 4 \times 10} = \frac{360}{120} = 3$$

Existe una relación entre la adición y la multiplicación que se utiliza continuamente en aritmética y álgebra. Esta relación se llama propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.

R8 *Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición:* Para cualesquiera números reales a, b y c,

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Ejemplo 8

a) $4 \times (2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3)$

b) $2 \times (x + y) = 2x + 2y$

c) $\begin{aligned}[t] (a + b) \times (c + d) &= [(a + b) \times c] + [(a + b) \times d] \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$

Nota: En la expresión $a \times (b + c)$, el paréntesis en $b + c$ es necesario para evitar cualquier interpretación errónea en la realización de las operaciones, dado que sin el paréntesis la expresión anterior podría realizarse:

i. Haciendo primero la suma de b y c y luego multiplicando el resultado de ésta por a, o

ii. Primero el producto $a \times b$ y a éste sumarle c.

Cuando en una expresión no aparecen paréntesis, las operaciones se realizan siguiendo un orden de prioridades: primero, potencias y raíces; segundo, productos y cocientes y, finalmente, sumas y restas. Este orden es el que sigue un computador en la realización de operaciones de este tipo.

Las propiedades R1 a R8 constituyen los fundamentos algebraicos de los números reales y de ellas se derivan otras importantes leyes del álgebra. En los cursos avanzados de matemáticas se toman R1 a R8 como axiomas de un sistema abstracto llamado cuerpo. Podemos, por tanto, decir que los números reales forman un cuerpo.

Ejemplo 9

Suponga que * es una operación definida de la siguiente manera:

$$a * b = (a + b) + (a \times b)$$

a) ¿Es * una operación binaria en $\mathbb{R}$?

b) ¿Es * conmutativa en $\mathbb{R}$?

c) ¿Es * asociativa en $\mathbb{R}$?

d) ¿Existe un elemento neutro? ¿cuál es? Calcule $2 * e$.

e) ¿Existen los inversos? ¿cuál es el inverso de 3?

Solución:

a) Dado que la suma (+) y el producto (×) son operaciones binarias en $\mathbb{R}$, * por su definición es también una operación binaria en $\mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned} a * b &= (a + b) + (a \times b) \\ &= (b + a) + (b \times a) \quad \text{(conmutatividad de + y × en } \mathbb{R}) \\ &= b * a \end{aligned}$$

Luego * es conmutativa en $\mathbb{R}$.

c)
$$\begin{aligned} (a * b) * c &= [\,(a + b) + (a \times b)\,] * c \\ &= \{[\,(a + b) + (a \times b)\,] + c\} + [\,(a + b) + (a \times b)\,] \times c \\ &= (a + b + c + a \times b) + (a + b) \times c + (a \times b \times c) \quad (1) \end{aligned}$$

Ahora,
$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * [\,(b + c) + (b \times c)\,] \\ &= a + [\,(b + c) + (b \times c)\,] + a \times [\,(b + c) + (b \times c)\,] \\ &\ (a + b + c + b \times c) + a \times (b + c) + (a \times b \times c) \quad (2) \end{aligned}$$

Como $1 \neq 2$, $a * (b * c) \neq (a * b) * c$, luego * no es asociativa en $\mathbb{R}$.

d) Sea e el idéntico, luego $\forall\, a$,

$$a * e = e * a = a,$$

Como * es conmutativa, $a * e = e * a$, entonces, si e es el idéntico,

$$a * e = a,$$

$a * e = (a + e) + (a \times e) = a$, entonces

$$\begin{aligned} a + e + ae &= a \\ e + ae &= 0 \\ e(1+a) &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

El idéntico es cero.

$$\begin{aligned} 2 * 0 &= (2 + 0) + (2 \times 0) \\ &= 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

e) Si existen los inversos, $\forall\ a,\ \exists\ a^{-1}$ /

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e = 0$$

$a * a^{-1} = 0$, luego

$$(a + a^{-1}) + (a \times a^{-1}) = 0$$

$$a^{-1} + a \times a^{-1} = -a$$

$$a^{-1}(1 + a) = -a$$

$$a^{-1} = \frac{-a}{1 + a}$$

a tiene inverso si $a \neq -1$.

El inverso de 3 es $\dfrac{-3}{1+3} = -\dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned} 3 * -\frac{3}{4} &= \left[3 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right] + \left[3 \times -\frac{3}{4}\right] \\ &= \frac{9}{4} + \left(-\frac{9}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Considere $S = \{ 1, m, n, o \}$ con la operación $\circledcirc$ definida en S de la siguiente manera:

$\circledcirc$	l	m	n	o
l	l	m	n	o
m	m	n	o	l
n	n	o	l	m
o	o	l	m	n

a) ¿Cuál es el idéntico de $\circledcirc$ sobre S?

b) Emplee la tabla para calcular $l \circledcirc (m \circledcirc n)$

c) ¿Es $l \circledcirc (m \circledcirc o) = (l \circledcirc m) \circledcirc o$?

d) ¿Cuál es el inverso de m?

Solución

a) Mediante una observación directa de la tabla, tenemos que cualquier elemento operado con "1" origina el mismo elemento; luego el idéntico de la operación es 1.

b) $1 \circledcirc (m \circledcirc n) = 1 \circledcirc o$

$ = o$

c) $1 \circledcirc (m \circledcirc o) = (1 \circledcirc m) \circledcirc o$

$1 \circledcirc 1 = m \circledcirc o$

$1 = 1$

d) $m \circledcirc ? = 1$

observe en la tabla que:

$m \circledcirc o = 1$

Luego el inverso de m es o.

En el conjunto de los números reales R existe un subconjunto importante, R^+, constituido por los números reales positivos. Este subconjunto está dotado de las siguientes propiedades:

R9 La suma de dos números reales positivos es positiva.

R10 El producto de dos números reales positivos es positivo.

R11 Ley de la tricotomía: para cada número real a es verdadera una, y solamente una, de las siguientes proposiciones:

a) a es positivo
b) $-a$ es positivo
c) a es cero

Cuando decimos que $-a$ es positivo, estamos asegurando que a es negativo. Así, R se divide en tres subconjuntos disyuntos:

a) los reales positivos
b) los reales negativos
c) el cero

3.5 Teoremas sobre los números reales

Son muchos los teoremas que se pueden demostrar con base en las propiedades de los números reales. Mencionaremos y demostraremos algunos, únicamente con el fin de realizar una aplicación de las propiedades.

Teorema 1

Si a, b y c representan números reales, y si $a = b$, entonces:

i. $a + c = b + c$

ii. $a - c = b - c$

iii. $a\,c = b\,c$

iv. $a/c = b/c$, si $c \neq o$

Teorema 2

Para todo número real a, $a \times 0 = 0$

Teorema 3

Si a y b son los números reales, y $a \times b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$

Teorema 4

Para todo número real a, $(-1) \times a = -a$

Teorema 5

Si a y b son dos números reales, entonces $(-a) \times (-b) = a \times b$

Teorema 6

Si a, b y c son números reales, y $ab = c$, con $a \neq 0$, entonces $b = \left(\frac{1}{a}\right) \times (c) = \frac{c}{a}$

Teorema 7

Si a, b y c son números reales, y $a\,c = b\,c$, con $c \neq 0$ entonces $a = b$.

Demostraciones

Teorema 3 Si $a, b \in R$, $ab = 0$ (1), entonces $a = 0$, ó $b = 0$

Demostración

Si $a = 0$, el teorema se cumple de inmediato.
Si $a \neq 0$, entonces

$\frac{1}{a}$ existe (por R7), luego, multiplicando en ambos miembros de (1) por $\frac{1}{a}$,

$$\left(\frac{1}{a}\right) \times ab = \frac{1}{a} \times 0, \text{ por R3 y Teorema 2}$$

$$\left(\frac{1}{a} \times a \times b = 0, \text{ por R7}\right)$$

$$(1) \times b = 0 \text{ por R5,}$$

$$b = 0$$

Teorema 4 $\forall\, a, (-1) \times a = -a$

Demostración

1) $1 + (-1) = 0$ Definición de inverso aditivo

2) $[1 \times a] + [(-1) \times a] = 0 \times a$	Propiedad distributiva
3) $0 \times a = 0$	Teorema 3
4) $1 \times a = a$	Definición de 1
5) $a + [(-1) \times a] = 0$	(2), (3) y (4)
6) $a + (-a) = 0$	Definición de inverso aditivo
7) $a + (-1) \times a = a + (-a)$	(5) y (6)
8) $(-1) \times a = -a$	Sustracción de a en ambos miembros

Teorema 6 $\forall\, a, b, c \in R$, si $a\, b = c$, $\quad b = \dfrac{1}{a}\, c, \quad a \neq 0$

Demostración

$a\, b = c$, como $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ existe, $\left(\dfrac{1}{a}\right) \times (a\, b) = \dfrac{1}{a} \times c$, por R3

$$\left[\frac{1}{a} \times a\right] \times b = \left(\frac{1}{a}\right) \times C, \text{por R7}$$

$$1 \times b = \left(\frac{1}{a}\right) \times C, \text{por R5}$$

$$b = \left(\frac{1}{a}\right) \times C$$

Teorema 7 $\forall\, a, b, c \in R$, si $a\, c = b\, c$ y $c \neq 0, a = b$

Demostración

$a\, c = b\, c$, como $c \neq 0, \dfrac{1}{c}$ existe, $\quad (ac) \times \dfrac{1}{c} = (bc) \times \dfrac{1}{c}$, por R3

$$a \times \left(c \times \frac{1}{c}\right) = b \times \left(c \times \frac{1}{c}\right), \text{por R7}$$

$$a \times 1 = b \times 1, \text{por R5}$$

$$a = b$$

3.6 Los enteros

Los enteros son los números naturales, el cero y los negativos de los números naturales: $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Con frecuencia se les llaman "enteros positivos", "cero" y "enteros negativos". Los enteros son, pues, casos especiales de los números reales; pero no verifican todas las propiedades *R1* a *R11*. Los enteros no verifican la propiedad *R7*.

3.7 Representación geométrica de los números reales

En matemáticas la representación de los números reales como puntos de una recta es de suma importancia. Por lo cual dedicaremos esta sección a la construcción y manejo de la recta numérica. Para conseguir esta representación comenzaremos por localizar arbitrariamente sobre la recta el punto 0.

A partir de cero, hacia la derecha se ubicarán los números positivos y hacia la izquierda los números negativos (*véase* Figura 3.2).

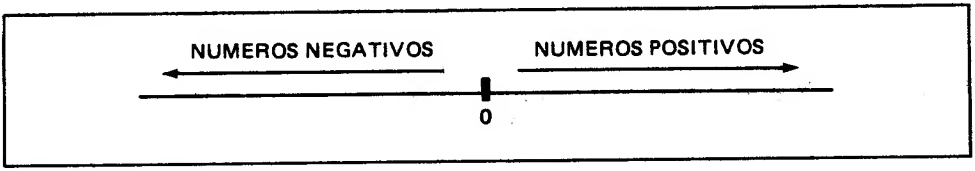


Figura 3.2 La recta numérica.

El hecho más importante en la representación es que a cada punto de la recta corresponde un número real, y solamente uno, y que a cada número real corresponde un punto de la recta y solamente uno.

En la representación de los números reales también es importante conservar el "orden".

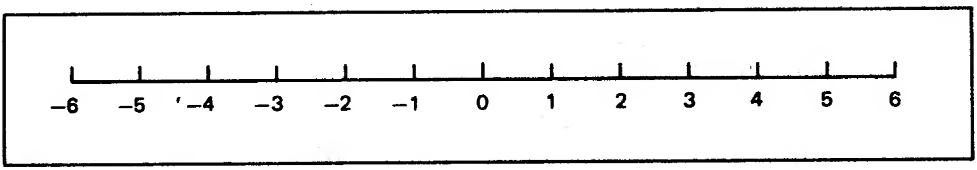


Figura 3.3 Representación de los enteros.

Observe que el segmento comprendido entre dos enteros consecutivos es siempre de la misma longitud. A esta longitud la llamaremos ***unidad patrón*** y se puede escoger arbitrariamente. O sea que la distancia que hay entre 0 y 1, es la misma que hay entre 1 y 2, 2 y 3, etc. La misma situación se puede considerar del cero hacia la izquierda (enteros negativos).

Así como representamos los enteros en la recta numérica podemos representar los números racionales, asociando a cada número racional un punto de la recta. Por ejemplo, si queremos representar racionales con denominador 3, dividimos la unidad patrón en tres partes iguales de longitud$\left(\frac{1}{3}\right)$,como muestra la Figura 3.4.

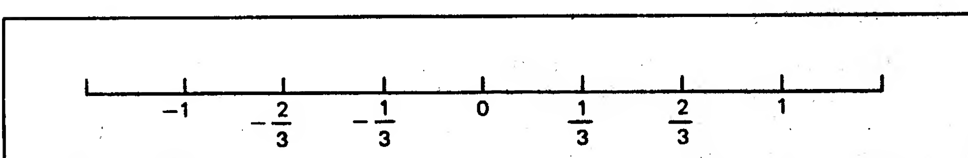


Figura 3.4 Representación de los racionales.

En general, para representar números racionales cuyo denominador es el entero $q \neq 0$, dividimos la unidad patrón en q partes iguales (*véase* Figura 3.5).

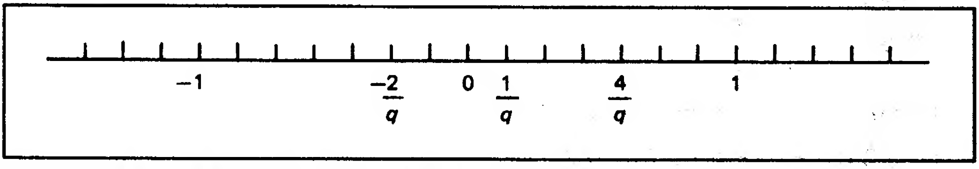


Figura 3.5 Representación de los racionales. Generalización.

De forma similar, podemos representar sobre la recta numérica los números irracionales. Por ejemplo, para ubicar $\sqrt{2}$, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan longitud 1. De esta manera obtenemos que la hipotenusa de este triángulo vale $\sqrt{2}$.[8] Una construcción como la de la Figura 3.6 nos permitirá ubicar $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica. De la misma manera, construyendo un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{2}$, obtendríamos $\sqrt{3}$, y así sucesivamente.

Hemos visto que podemos representar sobre la recta numérica, enteros, racionales, irracionales, positivos, negativos, es decir, cualquier número real. Todo número real se puede representar como un punto sobre la recta numérica y que a cada uno de sus puntos le corresponde un número real. Concluimos que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta numérica y los números reales.

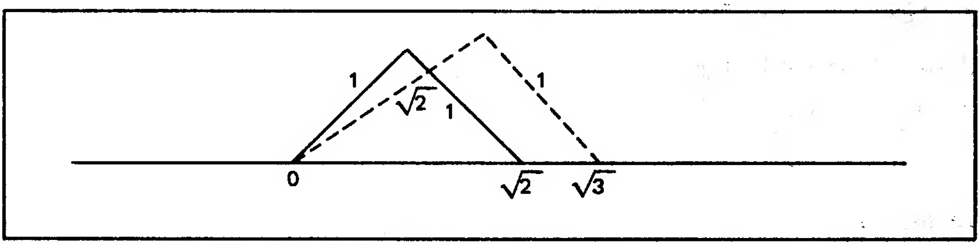


Figura 3.6 Representación de los irracionales.

3.8 Valor absoluto

Para cualquier número real a, se define su valor absoluto como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a; \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a; \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

[8] En un triángulo rectángulo, $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras). Siendo c la longitud de su hipotenusa y a, b las longitudes de sus catetos.

Esto significa que el valor absoluto de un número siempre es un número positivo, salvo en el caso de cero cuyo valor absoluto es cero. Observe que el valor absoluto se indica escribiendo el número entre barras.

Ejemplos

$$|3/5| = \frac{3}{5}$$

$$|-80| = -(-80) = 80$$

$$|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$|\pi| = \pi$$

$$|2-9| = |-7| = -(-7) = 7$$

El significado geométrico del valor absoluto de un número puede interpretarse como la distancia a la cual se encuentra dicho número del origen. (*Véase* Figura 3.7).

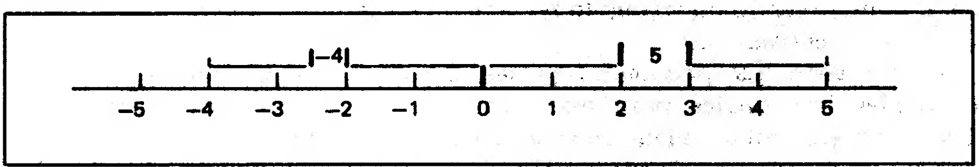


Figura 3.7 Representación geométrica del valor absoluto.

A continuación enumeramos algunas propiedades del valor absoluto.

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ [9]
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Ejemplos

1. $\sqrt{(-4)^2} = |-4|$

$$\sqrt{16} = -(-4)$$

$$4 = 4$$

2. $|(-4)(-2)| = |-4| \cdot |-2|$

$$|8| = [-(-4)] \cdot [-(-2)]$$

$$8 = (4)(2) = 8$$

[9] Un error frecuente consiste en considerar que $\sqrt{x^2} = \pm x$. Recuerde que $\sqrt{9}$ representa únicamente la raíz positiva de 9, luego $\sqrt{9} = +3$.

$$3\quad \left|\frac{1}{-3}\right| = \frac{|1|}{|-3|}$$

$$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{-(-3)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3.9 Plano cartesiano

Para la construcción del plano cartesiano trazamos primero dos rectas perpendiculares en el plano y las denominamos eje X y eje Y. Su punto de intersección se llama origen 0. Establecemos una correspondencia exacta entre el eje X y los números reales colocando el cero en 0, los reales positivos a la derecha de 0 y los reales negativos a la izquierda. Repetimos este proceso en el eje Y, colocando los reales positivos por encima de 0 y los reales negativos por debajo de 0. Para recordar esta convención dibujaremos una flecha hacia la derecha en el eje X, y otra hacia arriba en el eje Y. Estas rectas dividen el plano en cuatro regiones llamadas "cuadrantes" que se numeran I, II, III, IV (*véase* Figura 3.8).

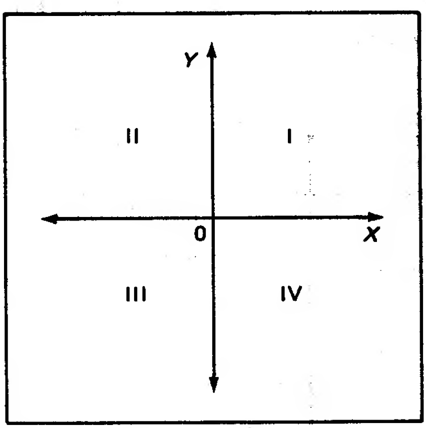


Figura 3.8 Cuadrante del plano cartesiano.

En el plano cartesiano es posible representar un par ordenado de números reales (x, y) en donde x representa la distancia del punto al eje Y, y y representa la distancia del punto al eje X. En términos generales, la representación de un par ordenado de números reales (x, y) determina un punto en el plano (*véase* Figura 3.9).

Un par ordenado (x, y) de números reales es un par donde el primer elemento es x y el segundo elemento es y. Como consecuencia de esta ordenación, el par (x, y) es distinto del par (y, x), si $x \neq y$.

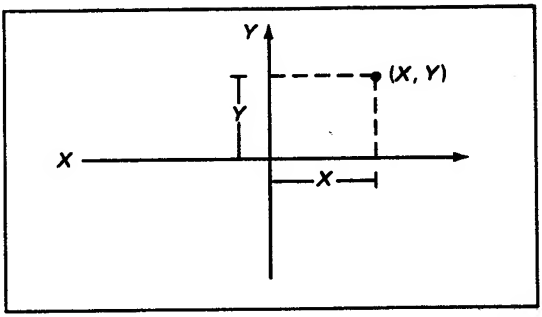
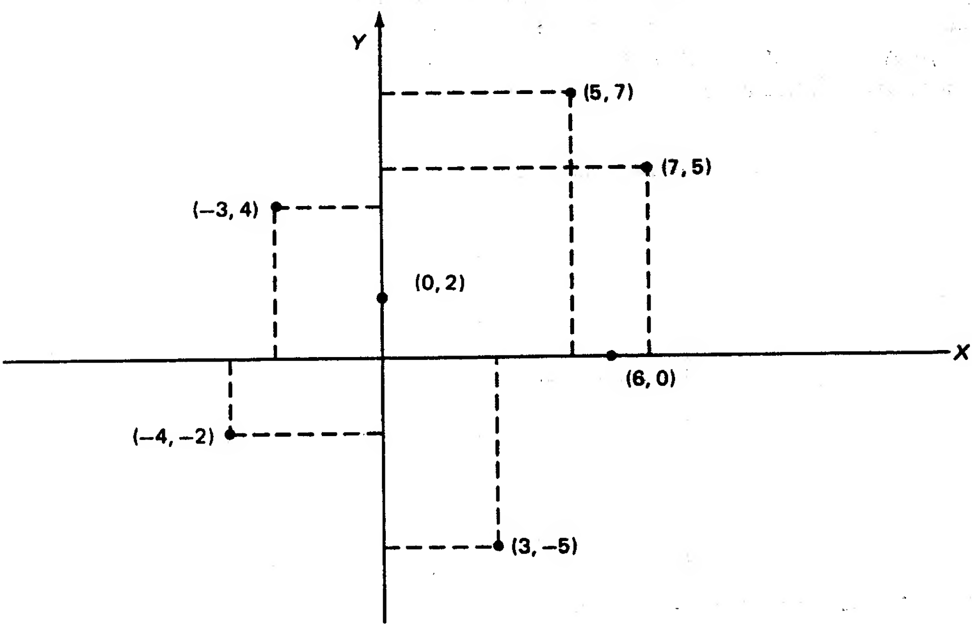


Figura 3.9 El plano cartesiano.

Ejemplo 11

Localice en el plano los siguientes puntos: (−3, 4), (−4, −2), (0, 2), (3, −5), (6, 0), (7, 5), (5, 7)

Solución



3.10 Resumen

Recuerde que:

1.

REALES (R)

IRRACIONALES (Q') — RACIONALES (Q)

RACIONALES (Q): ENTEROS (Z)

ENTEROS (Z): NATURALES (N) — {0} — NEGATIVOS

2. Si S es un conjunto, entonces $a*b$ es una operación binaria si a cada par ordenado (a, b) le corresponde un único elemento de S. ($a*b = c$, $c \in S$)
3. En el conjunto de los reales, la suma y el producto satisfacen las siguientes propiedades:

   R1: Son operaciones binarias.

   R2: Son conmutativas. $a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$

   R3: Son asociativas. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

   R4: El cero es el neutro de la suma. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$

   R5: El uno es el neutro del producto. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

   R6: Todo número real tiene inverso aditivo. Para todo a, existe $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

   R7: Todo número real diferente de cero tiene inverso multiplicativo. Para todo $a \neq 0$, existe a^{-1}, tal que $(a) \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot (a) = 1$

   R8: Distributiva. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. Las siguientes propiedades se refieren a los números positivos:

   R9: Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $(a + b) > 0$

   R10: Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $(a \cdot b) > 0$

   R11: Ley de tricotomía. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una, y sólo una, de las siguientes proposiciones: i) $a > 0$, ii) $-a > 0$, iii) $a = 0$
5. Valor absoluto de a ($|a|$)

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

3.11 Ejercicios y problemas

1. Diga a qué conjunto de los descritos en la sección sobre los sistemas numéricos pertenecen los siguientes números:

a) $-\sqrt{4}$	d) $\sqrt{7}$	g) $-e$
b) $3i$	e) π	h) 16
c) $7{,}\overline{25}$	f) $3 - \frac{1}{2}$	i) $\sqrt{-8} + 3$

2. a) ¿Por qué no es la sustracción una operación binaria en el conjunto de los enteros positivos? Dé un contraejemplo.

   b) Nombre un conjunto en el cual la sustracción sea una operación binaria.

   c) ¿Por qué la división no es una operación binaria en el conjunto de los números reales?

   d) Nombre un conjunto en el cual la división sea una operación binaria.

   e) ¿Es siempre verdadero que $a * b = b * a$?

f) ¿Qué propiedad tiene la operación * si, para cualesquiera a y b de S, $a * b = b * a$?

g) ¿Cuáles operaciones de la aritmética de los números reales son conmutativas?

h) ¿Por qué la sustracción no es conmutativa en los números reales? Dé un contraejemplo.

i) ¿Por qué la división no es conmutativa en los números reales? Dé un contraejemplo.

3. La operación binaria ⓧ está definida en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ según la Tabla 3.1.

ⓧ	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

Tabla 3.1

a) ¿Esta operación es conmutativa?

b) ¿Es asociativa?

c) ¿Cuál es el idéntico de ⓧ ?

d) ¿Cuál es el inverso de 2?

e) Calcule 2 ⓧ (3 ⓧ 1).

4. En el ejercicio siguiente demuestre o refute la proposición dada, utilizando las propiedades *R1* a *R8*.

a) $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

b) $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$

c) $a \div (b + c) = (a \div b) + (a \div c)$

d) $(a - b) + b - a$

e) Si $a \neq 0$, $ax + b = 0$ tiene solución única.

f) Para cualquier número real a existe un número real x tal que $0x = a$.

5. En la siguiente demostración hay un "único error". ¿Cuál es?

Sea $x = y$, luego

$$x^2 = x \cdot y$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$$(x - y)(x + y) = y(x - y)$$

$$x + y = y$$

$$2y = y$$

$$\frac{2y}{y} = \frac{y}{y}$$

$$2 = 1$$

6. Represente sobre una misma recta numérica los siguientes números:

   a) $-\dfrac{8}{9}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{\dfrac{5}{9}}$

7. Localice en el plano cartesiano los siguientes puntos:

   $P_1\ (-1, 1)$, $P_2\ (3, 0)$, $P_3\ (15, -3)$, $P_4\ (2, 3)$, $P_5\ (-\pi, \pi)$, $P_6\ \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{2}\right)$

8. a) Grafique el triángulo cuyos vértices están ubicados en los puntos: $P_1\ (-3, 5)$, $P_2\ (4, 2)$, $P_3\ (3, -2)$

   b) Grafique el rectángulo cuyos vértices son los puntos: $P_1\ (-3, 8)$, $P_2\ (-7, 4)$, $P_3\ (5, -7)$, $P_4\ (9, -3)$

9. Muestre que:

$$|8 + (-2/3)| \leqslant |8| + |-2/3|$$

Referencias

Miller, Charles. *Introducción al pensamiento matemático*. Trillas.
Budnick, Frank. *Matemáticas aplicadas*. McGraw-Hill.
Lovaglia. *Algebra*. Harla.
Barnett. *Algebra y trigonometría*. McGraw-Hill.

Algebra básica

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Realizar correctamente las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división de expresiones algebraicas.
2. Factorizar correctamente expresiones algebraicas.
3. Identificar y resolver con facilidad productos notables.

4.1 Introducción

El álgebra es la parte de las matemáticas que trata de las cantidades representadas por medio de símbolos. Comprende básicamente tres partes: polinomios, expresiones algebraicas y ecuaciones.

Los orígenes del álgebra se remontan a *Euclides* con el álgebra geométrica y surge plenamente independizada de la geometría con *Diofanto de Alejandría* (Siglo III A. C.).

Fue introducida en Europa por los árabes, y en 1494 se publica en Venecia (Luca Pacioli) el primer libro de álgebra.

El francés *Vieter* fue el primero en introducir letras para representar números de tal forma que cualquier razonamiento particular tomara carácter general. Vieter trabajó además en la mayoría de las simplificaciones algebraicas de las desigualdades.

Se puede decir que el álgebra elemental clásica termina con el teorema fundamental del álgebra enunciado en 1746 por D'Alembert y demostrado totalmente por Karl F. Gauss en 1799.

En este capítulo nos ocuparemos, en particular, de las expresiones algebraicas, de los polinomios y de las operaciones fundamentales entre ellos.

Los temas a tratar constituyen la base fundamental del álgebra; por tanto, es conveniente y necesario que cada uno de ellos sean trabajados suficientemente con el ánimo de crear una base sólida para los posteriores capítulos.

4.2 Expresiones algebraicas

Una combinación de números, variables y signos de operación se denomina expresión algebraica.[10]

---

[10] Una expresión que no es algebraica se denomina *trascendente*. Son trascendentes $2\cos^2 \alpha$, $\log(x+1)$, e^{x^2}.

Ejemplo: Son expresiones algebraicas

$$-2\cdot a\cdot b^2\cdot\ 4x^2 + 5x - \sqrt{2}y^2$$
$$3xyz + 2x^2y$$
$$4x^2y^3 + 6x^3y^3$$
$$\sqrt{3r + 5s^2}$$
$$\frac{x+y}{x^2+2y}$$

En una expresión algebraica cada una de las partes separadas por un "signo más" o por un "signo menos" se denominan términos de la expresión algebraica.

Ejemplo 1

En $4x^2 + 5x - \sqrt{2}y^2$, existen tres términos que son $4x^2$, $5x$, y $\sqrt{2}y^2$.

Cuando en una expresión algebraica aparecen radicales, factores o cocientes, éstos se consideran como un solo término.

Ejemplos

1. En $x^2 + \sqrt{x+y}$, hay solamente dos términos que son: x^2 y $\sqrt{x+y}$
2. En $3xy + \dfrac{5x^2}{x^2+y^2} + 1$, hay tres términos que son: $3xy, \dfrac{5x^2}{x^2+y^2}$, y 1

En un término se aprecian tres elementos fundamentales: el signo, el coeficiente y la parte variable.

El signo siempre será más (+) o menos (—), e indicará la operación a realizar con la expresión algebraica. El coeficiente será un número real y la parte variable (literal) está constituida por una o varias variables (base) y su correspondiente exponente, que representa el grado del término.

Ejemplo 2

En las expresiones $3xy$; $-\sqrt{x+1}$; $3z^5$, el signo, el coeficiente y la parte variable son:

signo	coeficiente	parte variable
+	3	xy
—	1	$\sqrt{x+1}$
+	3	$[z^5]$

Observe que si un término no va precedido de ningún signo se asume que el signo es más (+). Si en un término no aparece el coeficiente, se asume que éste es uno (1).

Ejemplos

1. $4 + 2x^2 - xy^{-2}\ z^3$

   En la anterior expresión algebraica se observan tres términos: 4; $2x^2$ y $-xy^{-2}z^3$. En el término $-xy^{-2}z^3$, el signo es menos (—), el coeficiente uno (1) y la parte variable es $xy^{-2}z^3$.

2. $ax^2 + bx + c$; a, b, c, constantes.

   En este caso a, b, c son los coeficientes de cada término.

Términos semejantes

Se dice que dos o más términos son *semejantes* si difieren únicamente en su coeficiente. Por ejemplo $4x^2y^3$ y $6x^2y^3$ son términos semejantes pero $3xy^2$ y $7x^2y$ *no* son términos semejantes ya que $xy^2 \neq x^2y$; del mismo modo son semejantes:

$$\frac{1}{2}mnp^{-1},\ 2nmp^{-1},\ 3p^{-1}mn \text{ ya que } mnp^{-1} = nmp^{-1} = p^{-1}mn.$$

Reducción de términos semejantes

Reducir significa reunir en uno solo varios términos. Para reducir términos semejantes se suman algebraicamente los coeficientes y se coloca la misma parte variable.

Ejemplos: Reducir

1. $84x^2y + 5x^2y + 3x^2y = +92x^2y$
   En este caso 92 es el resultado de sumar $84 + 5 + 3$. El signo más (+) proviene del signo más (+) de cada uno de los términos.

2. $-3ab^2 - 14ab^2 - ab^2 - 5ab^2 = -23ab^2$
   En este caso 23 es el resultado de sumar $3 + 14 + 1 + 5$. El signo menos (−) proviene del signo menos (−) de cada uno de los términos.

3. $13x^2y + 4x^2y - 8x^2y + x^2y - 24x^2y$
   $= 18x^2y - 32x^2y$
   $= -14x^2y$

   En este caso, 18 es el resultado de sumar $13 + 4 + 1$ y 32 es el resultado de sumar $8 + 24$; el signo menos por la misma razón del ejemplo anterior.

   14 es el resultado de $32 - 18$. El signo menos (−) aparece por ser el signo del coeficiente mayor.

   Los anteriores ejemplos nos permiten generalizar la siguiente regla:

   i) Cuando reducimos términos semejantes que tienen el mismo signo, se suman los coeficientes y se deja el mismo signo (ejemplos 1 y 2).

   ii) Cuando reducimos términos semejantes que tienen signos diferentes se reducen a uno solo los términos positivos, a uno solo los términos negativos y luego se restan los coeficientes obtenidos colocando el signo del coeficiente mayor (ejemplo 3).

Ejemplo: Reducir
$-21m^2x + 52m^2x - 60m^2x + 84m^2x - 31m^2x - m^2x - 33m^2x$
$= 136m^2x - 146m^2x$
$= -10m^2x$

4.3 Signos de agrupación

Los signos de agrupación se utilizan para clasificar y facilitar el manejo de expresiones algebraicas.

Los signos de agrupación más empleados son:

( ) Paréntesis

[ ] Paréntesis angular o corchetes

{ } Llaves

Ejemplo 3

$x + 2y - (3x + y)$
$(x - 2y)(x + 2y)$

Para suprimir signos de agrupación se debe tener en cuenta:

1. Si el signo de agrupación está precedido de un signo más (+) todos los términos dentro del signo de agrupación *conservan* el mismo signo. Así:
   $x^2 + (-2x^2 + 3x - 8)$
   $= x^3 - 2x^2 + 3x - 8$
2. Si el signo de agrupación está precedido de un signo más (+) todos los los términos dentro del signo de agrupación se les *cambia* el signo. Así:
   $2m - (3y^2 - 6a^2 + 3b^2)$
   $= 2m - 3y^2 + 6a^2 - 3b^2$
3. Cuando dentro de un signo de agrupación están incluidos otros, la supresión de los mismos se realiza de adentro hacia afuera, así:
   $8x + \{-5a - [-m + 3a - (-9x - m - a)]\}$
   $= 8x + \{-5a - [-m + 3a + 9x + m + a]\}$
   $= 8x + \{-5a + m - 3a - 9x - m - a\}$
   $= 8x - 5a + m - 3a - 9x - m - a$

Ejemplos

Suprimir los signos de agrupación en la siguiente expresión:
$3x - (2xy - 3y^2) + \{y - [2xy - (x^2 + 3y) + 2y^2]\}$
$= 3x - 2xy + 3y^2 + \{y - [2xy - x^2 - 3y + 2y^2]\}$
$= 3x - 2xy + 3y^2 + \{y - 2xy + x^2 + 3y - 2y^2\}$
$= 3x - 2xy + 3y^2 + y - 2xy + x^2 + 3y - 2y^2$

4.4 Operaciones con expresiones algebraicas

En esta sección estudiaremos la manera de realizar las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas. Trataremos únicamente la adición y la multiplicación ya que algebraicamente la sustracción y la división son casos particulares de la adición y la multiplicación respectivamente.[11]

[11] Ver definición página 41.

Adición

Las expresiones:

$3x + 2x$
$8y - 11y$
$-3mx^2 + mn + 6mx^2$
$(4x^2 - 3xy + 2) - (5x^2 + x - 3)$

Se consideran todas como adiciones de expresiones algebraicas. Observe que

$3x + 2x$
$8y + (-11y)$
$(-3mx^2) + mn + 6mx^2$
$(4x^2 - 3xy + 2) + (-1)(5x^2 + x - 3)$

Para sumar expresiones algebraicas se procede de la siguiente manera:

i) Se suprimen los signos de agrupación.

ii) Se reducen los términos semejantes.

Ejemplos

Efectuar las operaciones indicadas

1. $(3a^2 + 2ab + c) + (3c - 4a^2 - ab)$
$= 3a^2 + 2ab + c + 3c - 4a^2 - ab$
$= 3a^2 - 4a^2 + 2ab - ab + c + 3c$
$= -a^2 - ab + 4c$

2. $(3r^2s + r^3 + 4s^5) - (3r^3 - 4s^5 + 6rs^2) + (10r^2s + 15rs^2)$
$= 3r^2s + r^3 + 4s^5 - 3r^3 + 4s^5 - 6rs^2 + 10r^2s + 15rs^2$
$= 13r^2s + 9rs^2 + 8s^5 - 2r^3$

3. $(4a^2 - 3b^2) - (7ab + b^2) - (5a^2 + 6ab + 10b^2)$
$= 4a^2 - 3b^2 - 7ab - b^2 - 5a^2 - 6ab - 10b^2$
$= -a^2 - 14b^2 - 13ab$

El proceso de la adición se puede realizar convenientemente si se distribuye el trabajo en columnas de manera que cada columna contenga únicamente términos semejantes. Por ejemplo, la siguiente suma:

$(5x^2y + x - 3xy^2 + 2) + (-2x + 3y + 7xy^2 - 5)$

se puede escribir así:

$$\begin{array}{rrrrr} 5x^2y & +\ x & -\ 3xy^2 & +\ 2 & \\ & -2x & +\ 7xy^2 & -\ 5 & +\ 3y \\ \hline 5x^2y & -\ x & +\ 4xy^2 & -\ 3 & +\ 3y \end{array}$$

Esta distribución del trabajo es particularmente útil cuando hay que sumar tres o más polinomios.

Multiplicación

Para multiplicar dos o más expresiones algebraicas se debe realizar el siguiente procedimiento:

i) Producto de los signos
Para efectuar el producto de los signos, procedemos así:
Producto de signos iguales da positivo (+)
Producto de signos diferentes da negativo (−)

ii) Producto de los coeficientes
El coeficiente del producto es el producto de los coeficientes de los factores.

iii) Producto de las partes variables
Para efectuar este producto, se tiene en cuenta la "ley de los exponentes":
Para multiplicar potencias que tienen la misma base se escribe la misma base y se suman los exponentes.

$a^4 \times a^3 \times a = a^{4+3+1} = a^8$

Observe que $(a^2 b^3) \times a^3$
$= (a^2 b^3) \times (a^3 b^0)$
$= a^{2+3} \cdot b^{3+0} = a^5 b^3$

iv) Finalmente se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplos
Efectuar los siguientes productos:

1. $\left(\frac{2}{3} x^2 y^3\right)\left(-\frac{3}{5} a^2 x^4 y\right)$

i) $(+) \cdot (-) = -$

ii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

iii) $(x^2 y^3)(a^2 x^4 y) = a^2 \cdot x^{2+4} \cdot y^{3+1}$
$= a^2 x^6 y^4$

Luego

$$\left(\frac{2}{3} x^2 y^3\right)\left(-\frac{3}{5} a^2 x^4 y\right) = -\frac{2}{5} a^2 x^6 y^4$$

2. $(3a^2 b)\left(\frac{1}{4} a^3 bc^2 - 4ab^4 c^3 + 8\right)$

Aplicando la ley distributiva, se tiene:

$$= (3a^2 b)\left(\frac{1}{4} a^3 bc^2\right) + (3a^2 b)\,(-4ab^4 c^3) + (3a^2 b)\,(8)$$

y siguiendo el procedimiento para multiplicar, se obtiene

$$= \frac{3}{4} a^5 b^2 c^2 - 12a^3 b^5 c^3 + 24a^2 b$$

3. $(a^2 + 2b)(3a^2 + 4b + 1)$. La ley distributiva nos permite escribir

$a^2 (3a^2 + 4b + 1) + 2b\,(3a^2 + 4b + 1)$

Una nueva aplicación de la ley distributiva nos da

$(3a^4 + 4a^2b + a^2) + (6a^2b + 8b^2 + 2b)$

$= 3a^4 + 10a^2b + a^2 + 8b^2 + 2b$

El trabajo puede prepararse como se indica a continuación:

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 4b + 1 \\ \underline{\;\, a^2 + 2b \qquad\quad} \\ 3a^4 + 4a^2b + a^2 \\ \underline{\qquad + 6a^2b + 8b^2 + 2b} \\ 3a^4 + 10a^2b + a^2 + 8b^2 + 2b \end{array}$$

Un caso particularmente importante es el del producto de dos expresiones que contienen potencias de una sola variable. En este caso es conveniente disponer el orden de los términos de tal manera que los exponentes decrezcan término a término, esto es, "en orden descendente de potencias".

Así, si tenemos

$7x^2 + 21x^5 - x^3 + 2x - 1 + 5x^4$

escribiremos

$21x^5 + 5x^4 - x^3 + 7x^2 + 2x - 1$

Esta disposición facilitará el trabajo de la multiplicación y, más tarde, el de la división.

4. $(9a^2 + 1)(x^2 - 3)(x^2 + 2x)$

Para realizar este producto efectuamos el producto de los dos primeros factores y este nuevo producto lo multiplicamos por el tercer factor.

$= (9a^2x^2 - 27a^2 + x^2 - 3)(x^2 + 2x)$

$= 9a^2x^4 - 27a^2x^2 + x^4 - 3x^2 + 18a^2x^3 - 54a^2x + 2x^3 - 6x$

$= x^4 + 9a^2x^4 + 2x^3 + 18a^2x^3 - 3x^2 - 27a^2x^2 - 6x - 54a^2x$

El producto final es independiente del orden en que se multipliquen los factores.

4.5 Productos notables

Existen algunos productos cuyos resultados se pueden determinar fácilmente siguiendo ciertas reglas. Estudiaremos las siguientes:

a) Cuadrado de la suma de dos términos

$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \tag{4.1}$$

Luego el cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero *más* el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplo 4

Calcule:

$$\begin{aligned}(3a^3 + 8b^4)^2 &= (3a^3)^2 + 2(3a^3)(8b^4) + (8b^4)^2\\ &= 9a^6 + 48a^3b^4 + 64b^8\end{aligned}$$

b) Cuadrado de la diferencia de dos términos

$(a-b)(a-b) = (a-b)^2$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \tag{4.2}$$

Luego el cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplo 5

Calcule:

$$\begin{aligned}(x^m - y^n)^2 &= (x^m)^2 - 2(x^m y^n) + (y^n)^2\\ &= x^{2m} - 2x^m y^n + y^{2n}\end{aligned}$$

Los dos productos anteriores se pueden resumir así:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2} \tag{4.3}$$

c) Cubo de una suma o una diferencia de dos términos

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} \tag{4.4}$$

Luego el cubo de una suma (diferencia) de dos términos es igual al cubo del primero más (menos) el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más (menos) el cubo del segundo.

Una generalización de los productos anteriores, $(a \pm b)^n$, se obtiene aplicando el teorema del binomio.[12]

d) Producto de una suma por una diferencia

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \tag{4.5}$$

[12] Ver apéndice. Teorema del binomio.

Luego el producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo (diferencia de los cuadrados).

Ejemplo 6

$$\left(8xy+\frac{1}{3}x^2y\right)\left(8xy-\frac{1}{3}x^2y\right)$$

$$=(8xy)^2-\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2$$

$$=64x^2y^2-\frac{1}{9}x^4y^2$$

e) Producto de la forma $(x+a)(x+b)$

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+(ab)} \tag{4.6}$$

Luego el producto $(x+a)(x+b)$ es igual al cuadrado del primer término más el producto del primer término por la suma de los segundos términos, más el producto de los segundos términos.

Ejemplo 7

$(x^2+5y)(x^2-7m)$
$=(x^2)^2+(5y-7m)x^2+(5y\cdot -7m)$
$=x^4+(5y-7m)x^2-35ym$
$=x^4+5x^2y-7x^2m-35ym$

Sugerencia: antes de continuar, se recomienda realizar los ejercicios al final del capítulo relacionados con los temas vistos.

4.6 Factorización

Factorizar una expresión algebraica significa escribirla como un producto de factores.

La expresión $(3x+2)(x-5)$ está factorizada porque se encuentra expresada como un producto, en este caso de dos factores; por el contrario la expresión $(4x-1)(y+6)+(x+2)$ *no* está factorizada ya que, aunque aparece un producto, la expresión se encuentra escrita como una suma.

Al descomponer en factores (factorizar) pretendemos deshacer el proceso de la multiplicación. Veremos la importancia de descomponer en factores cuando tengamos que simplificar fracciones algebraicas o resolver ciertas clases de ecuaciones.

El problema de la descomposición de factores puede ser complicado algunas veces. En esta sección trataremos ciertos métodos de factorización elementales y directos, y algunos teoremas menos usuales.

a) Factor común

Cuando todos los términos de una expresión algebraica tienen un factor común, aplicamos la ley distributiva "hacia atrás" para factorizarla.

$a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva)

$ab + ac = a(b + c)$

factor común   expresión factorizada

Ejemplos

1. $2x^3 + 6x^2 - 10 = 2(x^3 + 3x^2 - 5)$
2. $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$
3. $ac + bc + ad + bd = (ac + bc) + (ad + bd)$
   $= c(a + b) + d(a + b) = (c + d)(a + b)$
4. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$
5. $x^2 - a^2 + x - a^2x = x^2 + x - (a^2 + a^2x)$
   $= x(x + 1) - a^2(1 + x)$
   $= (x + 1)(x - a^2)$

b) Trinomio cuadrado perfecto

Una expresión algebraica es un cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otra expresión; esto es, cuando es el producto de dos factores iguales.

Ejemplo 8

1. $9x^2$ es un cuadrado perfecto
   $9x^2 = (3x)^2$
   $= (3x)(3x)$
2. $16x^2 + 8xy + y^2$ es un cuadrado perfecto
   $16x^2 + 8xy + y^2 = (4x + y)^2$
3. $81 - 108a^4 + 36a^8$ es un cuadrado perfecto
   $81 - 108a^4 + 36a^8 = (9 - 6a^4)^2$

Observe que los dos últimos ejemplos satisfacen (4.3), esto es

$16x^2 + 8xy + y^2$

$(4x)^2 \qquad (y)^2$

$2(4x)(y)$

luego para reconocer cuándo una expresión es un trinomio cuadrado perfecto, debemos verificar que en dicha expresión dos de los términos sean cuadrados perfectos (ambos positivos o ambos negativos) y el otro término sea el doble producto de las raíces de los dos anteriores.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto se escribe dicho trinomio como el cuadrado de la suma o diferencia de las raíces de sus cuadrados perfectos.

Ejemplo 9

1. $$\begin{array}{ccc} 9a^2 & -\,30\,ab^2 & +\,25b^4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3a)^2 & 2(3a)\,(5b^2) & (5b^2)^2 \end{array}$$

Luego $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4 = (3a - 5b^2)^2$

2. $x^4 + x^2y^2 + \dfrac{y^4}{4}$

$$x^4 + x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^2$$

3. $-36 + 12m^2 - m^4$
$= -(36 - 12m^2 + m^4)$
$= -(6 - m^2)$

c) Diferencia de dos cuadrados

Consideremos expresiones de la forma $x^2 - a^2$

Por (4.5)

$x^2 - a^2 = (x + a)\,(x - a)$

por tanto, los factores de una diferencia de cuadrados pueden escribirse a primera vista.

Ejemplos

1. $x^2 - 9 = (x + 3)\,(x - 3)$
2. $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2)$
$\qquad = (x^2 + y^2)\,(x - y)\,(x + y)$ Factorizado totalmente
3. $(3x + 5)^2 - (2x - 1)^2 = [(3x + 5) + (2x - 1)] \times [(3x + 5) - (2x - 1)]$
$\qquad = (5x + 4)\,(x + 6)$
4. $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})\,(x - \sqrt{2})$

d) Completación del cuadrado perfecto

No todos los trinomios son cuadrados perfectos, así, $a^4 + a^2b^2 + b^4$, no es un cuadrado perfecto, ya que, aunque existen dos cuadrados perfectos, el tercer término no corresponde al doble producto de las raíces de los cuadrados.

Para transformar la expresión inicial en cuadrado perfecto, completamos con el término que hace falta, así

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 - a^2b^2 + b^4$$
$$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2$$

Observe que la expresión dentro del paréntesis es ahora un trinomio cuadrado perfecto, por tanto

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

Ejemplo 10

Factorice

$$\begin{array}{ccc} 16x^8 & - 25x^4y^2 & + 9y^4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (4x^4)^2 & & (3y^2)^2 \\ & 2(4x^4)(3y^2) & \\ & = 24x^4y^2 & \end{array}$$

luego $16x^8 - 25x^4y^2 + 9y^4$

$$= 16x^8 - 24x^4y^2 + 9y^4 - x^4y^2$$
$$= (4x^4 - 3y^2)^2 - x^4y^2$$
$$= (4x^4 - 3y^2 + x^2y)(4x^4 - 3y^2 - x^2y)$$

No siempre al completar un cuadrado perfecto obtenemos una diferencia de cuadrados y por consiguiente no se puede hacer la factorización; sin embargo, el completar el cuadrado es una metodología de mucha utilidad en matemáticas.

e) Factorización de una expresión de la forma $x^2 + mx + n$

Algunas expresiones de esta forma son:

$x^2 + 5x + 6$

$y^2 - 13y - 8$

$z^2 - 8z + 15$

Si las expresiones anteriores se pueden escribir de alguna de las siguientes formas:

$$x^2 + (a + b)x + (a)(b) \qquad (1)$$
$$x^2 + (a - b)x + (a)(-b) \qquad (2)$$
$$x^2 + (-a + b)x + (-a)(b) \qquad (3)$$
$$x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b) \qquad (4)$$

se factorizan así, respectivamente:

$$(x + a)(x + b)$$
$$(x + a)(x - b)$$
$$(x - a)(x + b)$$
$$(x - a)(x - b)$$

Ejemplos

Factorice:

1. $x^2 + 7x + 12$.

   Como la expresión anterior se puede escribir de la forma (1),

   $x^2 + (4 + 3)x + (4)(3)$

   entonces:

   $$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= x^2 + (4 + 3)x + (4)(3) \\ &= (x + 4)(x + 3) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= x^2 + (5 - 2)x + (5)(-2) \\ &= (x + 5)(x - 2) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x^2 - 2x - 24 &= x^2 + (-6 + 4)x + (-6)(4) \\ &= (x - 6)(x + 4) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x^2 - 9x + 14 &= x^2 + (-7 - 2)x + (-7)(-2) \\ &= (x - 7)(x - 2) \end{aligned}$$

Observe que $y^2 - 13y - 8$ no se puede escribir de ninguna de las cuatro formas anteriores; por tanto, no es factorizable utilizando este método. Expresiones como éstas se tratarán más adelante (teorema del factor).

4.7 División

Dado que la división es un caso particular de la multiplicación, se cumplen para ésta las leyes de los signos vistas en el producto. Trataremos a continuación los siguientes casos:

a) División de un monomio entre un monomio

Para resolver esta operación se deben realizar los siguientes pasos:

i) Cociente de los signos, como en el producto.

ii) Cociente de los coeficientes, que se obtiene dividiendo el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

iii) Cociente de las partes variables, que se efectúa aplicando la ley de los exponentes para la división, que dice: Para dividir dos potencias que tengan la misma base, se escribe la misma base y como exponente se deja la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

$$a^6 \div a^2 = \frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4 \quad [13]$$

[13] Recuerde que $m \div n = \dfrac{m}{n}$

Ejemplo 11

Divida:

1. $-12x^8y^2z^5$ entre $4x^5y^5z^3$

$$\frac{-12x^8y^2z^5}{4x^5y^5z^3} = -3x^{8-5}y^{2-5}z^{5-3} = -3x^3y^{-3}z^2$$

2. $$\frac{-5m^2n^k}{-2m\,n^3p^2} = \frac{5}{2}m^{2-1}n^{k-3}p^{0-2}$$

$$= \frac{5}{2}m\,n^{k-3}p^{-2}$$

Observe que $-5\,m^2\;n^k$ es equivalente a $-5\,m^2n^kp^0$

b) División de un polinomio entre un monomio[14]

Para realizar esta operación, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, siguiendo el procedimiento anterior.

Ejemplo

$$\left(\frac{3}{4}x^5 - 5m^2 + x^{-2}m\right)\left(\frac{2}{3}x^2m^3\right)$$

$$\frac{\frac{3}{4}x^5 - 5m^2 + x^{-2}m}{\frac{2}{3}x^2m^3} = \frac{\frac{3}{4}x^5}{\frac{2}{3}x^2m^3} - \frac{5m^2}{\frac{2}{3}x^2m^3} + \frac{x^{-2}m}{\frac{2}{3}x^2m^3}$$

$$= \frac{9}{4}x^3m^{-3} - \frac{15}{2}x^{-2}m^{-1} + \frac{3}{2}x^{-4}m^{-2}$$

c) División de polinomios

Para dividir dos polinomios, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Se ordenan en forma decreciente, con respecto al exponente, ambos polinomios.
2. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos el primer término del cociente.
3. Se multiplica este primer término del cociente por todos los términos del divisor. El producto así obtenido se resta adecuadamente del dividendo.

[14] En este caso la palabra polinomio representa sólo expresiones algebraicas que tienen dos o más términos. Más adelante, un polinomio representará una expresión matemática con características especiales.

4. La diferencia obtenida se considera como el nuevo dividendo y se continúa con el procedimiento como en los pasos anteriores, hasta que el grado del dividendo sea estrictamente menor que el grado del divisor.

Ejemplo 12

Divida:

$6x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 10x + 1$ entre $2x^2 + x + 4$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +7x^3 & +12x^2 & +10x & +1 & 2x^2 + x + 4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & -3x^3 & -12x^2 & & & 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & +0x^2 & +10x & +1 & \\
 & -4x^3 & -2x^2 & -8x & & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & +2x & +1 & \\
 & & +2x^2 & +x & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +5 &
\end{array}
$$

Tenemos como cociente $3x^2 + 2x - 1$ y como resto $3x + 5$.

4.8 Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas. Algunos ejemplos son:

$$
\frac{3x^2 + 4a}{x + 1}, \quad \frac{\sqrt{x^3 - 1} + 4x}{\sqrt[3]{x + 7}}, \quad \frac{\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{3}\,x}{\dfrac{2}{x + 5}}
$$

Se entiende que a ninguna variable se le puede asignar un valor que anule cualquiera de los denominadores que aparecen en la fracción. Así, en el primer ejemplo se debe excluir $x = -1$, en el segundo $x = -7$ y en el tercero se deben excluir $x = 0$ y $x = -5$. Es necesario tener siempre en cuenta estas restricciones y tomar las precauciones necesarias.

Es importante recordar que en el álgebra de las fracciones se aplican las propiedades R_1 a R_8 del Capítulo 3.

Trabajar con fracciones algebraicas no es fácil; lo más apropiado es simplificar las fracciones antes de iniciar los procesos operacionales.

Simplificación de fracciones

Existe un principio básico que nos permite simplificar. Este principio dice que si se dividen el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad, distinta de cero, el resultado es una fracción igual a la fracción dada.

Ejemplos

1) $\dfrac{ka}{kb} = \dfrac{a}{b}$ para $k \neq 0$

2) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{x-2}{x-1}$

3) $\dfrac{4x^2 + 7x}{x^2} = \dfrac{x(4x+7)}{x(x)} = \dfrac{4x+7}{x}$

Como observamos en los ejemplos, una de las formas de aplicar el principio básico de simplificación consiste en factorizar numerador y denominador de manera que se obtengan factores comunes.

En el ejemplo siguiente, aunque factoricemos no es posible simplificar ya que el numerador y el denominador carecen de factores comunes.

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

Mínimo común denominador

Uno de los conceptos más importantes en el trabajo de fracciones algebraicas es el mínimo común denominador (m. c. d.).

Como su nombre lo indica, el m. c. d. es la expresión algebraica más simple, de la cual son factores todos los denominadores.

Ejemplo 13

4) $(x+1)(x-1)$ es el m. c. d. de

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{x+2}{x-1}$$

5) $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ es el m. c. d. de

$$\frac{1}{x-2}, \quad \frac{x^2+5}{x-1}$$

6) $x^2\ (x+4)$ es el m. c. d. de

$$\frac{2x}{x}, \quad \frac{5}{x^2}, \quad \frac{7-x}{x+4}$$

7) $x^2 - 1$ es el m. c. d. de

$$\frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{1}{x+1}, \quad \frac{2}{x^2-1}$$

En los ejemplos anteriores es claro que cada uno de los denominadores es factor del m. c. d. dado.

En los dos primeros ejemplos el m. c. d. es el producto de los dos denominadores ya que ninguno de ellos contiene al otro. En el tercer ejemplo como x^2 contiene a x, $x^2\ (x+4)$ es la mínima expresión de la cual son factores los tres denominadores; luego éste es el m. c. d.

De manera similar en el ejemplo 4, como $x-1$ y $x+1$ son factores de x^2-1, x^2-1 es la mínima expresión que contiene los tres denominadores; luego x^2-1 es el m. c. d.

Suma algebraica de fracciones

Para realizar la suma algebraica de fracciones es necesario que éstas tengan un común denominador. Si no lo tienen, se busca el m. c. d. y se procede como en los siguientes ejemplos:

Realice las siguientes operaciones:

8) $$\frac{2x-1}{x+3} + \frac{x^2}{3x-1} =$$

en este caso el m. c. d. es $(x+3)(3x-1)$, luego

$$\frac{(2x-1)(3x-1)}{(x+3)(3x-1)} + \frac{(x^2)(x+3)}{(3x-1)(x+3)} = \frac{(2x-1)(3x-1)+x^2\ (x+3)}{(x+3)(3x-1)}$$

$$= \frac{x^3+9x^2-5x+1}{(x+3)(3x-1)}$$

9) $$\frac{x}{x+3} + \frac{5x^2}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{5x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x(x-3)+5x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-3x+5x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{6x^2-3x}{x^2-9}$$

10) $$\frac{3x+4}{x^2-16} + \frac{x-3}{x^2+8x+16} = \frac{3x+4}{(x-4)(x+4)} + \frac{x-3}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{(3x+4)(x+4)+(x-3)(x-4)}{(x+4)^2\ (x-4)}$$

$$= \frac{3x^2 + 12x + 4x + 16 + x^2 - 7x + 12}{(x+4)^2\,(x-4)}$$

$$= \frac{4x^2 + 9x + 28}{(x+4)^2\,(x-4)}$$

Multiplicación y división de fracciones

La multiplicación y la división de fracciones son operaciones más sencillas de realizar que la suma algebraica, y obedecen a las siguientes reglas:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Antes de aplicar estas reglas es conveniente simplificar las expresiones para facilitar los cálculos.

11) $$\frac{x^2 - y^2}{4y} \cdot \frac{2y}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{4y} \cdot \frac{2y}{x+y}$$

$$= \frac{(x-y)(x+y)(2y)}{(4y)(x+y)}$$

$$= \frac{x-y}{2}$$

12) $$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 1} \div \frac{x^2 + 1}{x+4} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+4}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

Como no hay factores comunes, no es posible simplificar.

13) $$\frac{\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x-2}}{\dfrac{x-5}{3x}} = \frac{\dfrac{2(x-2) - 3(x-3)}{(x-3)(x-2)}}{\dfrac{x-5}{3x}}$$

$$= \frac{\dfrac{2x - 4 - 3x + 9}{(x-3)(x-2)}}{\dfrac{x-5}{3x}}$$

$$= \frac{5-x}{(x-3)(x-2)} \cdot \frac{3x}{x-5}$$

$$= \frac{-(x-5)(3x)}{(x-3)(x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{-3x}{(x-3)(x-2)}$$

Una expresión como la inicial, que contiene fracciones en el numerador y/o en el denominador, se denomina fracción compleja y puede también resolverse mediante la siguiente regla:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo 14

$$\frac{\dfrac{-2}{x^2 - 1}}{\dfrac{2x}{x+1}} = \frac{-2(x+1)}{(x^2-1)(2x)}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+1)(x-1)2x}$$

$$= \frac{-1}{x(x-1)}$$

4.9 Resumen

Recuerde que:

1. Una expresión algebraica es una combinación de números, variables y signos de operación. Ejemplo:

   $\sqrt{2}\, y^2 + \sqrt{xy}$ En la expresión anterior

   $\sqrt{2}\, y^2$ y $\sqrt{xy}$ son los términos de la expresión

2. Dos o más términos son semejantes si difieren únicamente en su coeficiente. Ejemplo:

   $5\sqrt{x+y}$ y $-\frac{2}{3}\sqrt{x+y}$ son semejantes

3. Sólo se pueden adicionar (reducir) expresiones algebraicas si sus términos son semejantes.
4. Para multiplicar dos o más expresiones algebraicas se realiza el producto de los signos, de los coeficientes y de la parte variable.
5. Las siguientes expresiones son productos notables:

   $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

   $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 2a^2 b + 2ab^2 \pm b^3$

   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

   $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$

6. Factorizar una expresión algebraica significa escribirla como un producto de factores.

4.10 Ejercicios y problemas

1. Reduzca las siguientes expresiones:
   a) $3x^2 - \{3x + 2 - [3x^2 + 5x - (4x+6) - 6x + 2]\}$
   b) $3xy - [5x - 3xy + 2x - (7xy - 1) + (4x^2 - xy)] + x^2 + 5$
   c) $(3a^2 - 3b^2 + 8c^3) + (2a^2 + 4b^2 - 6c^3) - (a^2 + b^2 + c^3)$
   d) $(4xy + x^2 - 4y^4) + (x^2 + y^2 - 2xy) - (4x^2 - 3y^2 + 7xy)$
   e) $(6r^2 s + r^3 + 4s^5) - (3r^3 - 4s^5 + 6rs^2) + (10r^2 s + 15rs^2)$
   f) $[(4a^2 - 3b^2) - (7ab + b^2)] - (5a^2 + 6ab + 10b^2)$
   g) $(20x^2 - 12xy + 15y^2) - [4(x^2 + 2y^2) - (10xy - 5y^2)]$
2. Realice los siguientes productos y reduzca los términos semejantes.
   a) $(3x^2 - 6x)(5x^2 - 7x - 4)$
   b) $(4mn - 6m^2 + n)(m - n)$
   c) $(xy + y)(y + zx)(y + x)$
   d) $(2x + x^4 - 3x^3 + 4)(3x + 6 - 5x^2)$
   e) $(4a^4 - 6ab^2 + b^3)(3a^3 - b^2 + 2)$
   f) $(r^3 + 3r^2 s^2 + s^4)(s^2 - 2s + 6)$
   g) $(5x^4 - 3x^3 y + 6x^2 y^2 + xy^3 - y^4)(2x^2 + xy - y^2)$
   h) $(4a^4 - 2a^3 b + 5a^2 b^2 - 3ab^3 + b^4)(a^2 - ab - b^2)$
3. Resuelva directamente:
   a) $(a^2 + 8)(a^2 - 5)$
   b) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
   c) $(15 + x^2 y^5)^2$

d) $(a^2 b - \sqrt{3})^2$

e) $(\frac{3}{x} + x^2)^3$

f) $(3m - \sqrt{2}\,n)^3$

g) $(x + y + z)^2$ indicación $x + y + z = (x+y) + z$

4. Factorice completamente:

a) $x^2 + 2x - 8$

b) $32 + 12x + x^2$

c) $x^2 + 12x + 11$

d) $12x^2 - 27$

e) $a^2 - 13ab + 30b^2$

f) $3x^2 - 2x - 8$

g) $x^2 + x - 2$

h) $36x^2 - 121$

i) $x^2 - 3$

j) $(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16)$

k) $27x^3 - 1$

l) $x^3 + 125$

m) $k^2 + 9 + 6k - x^2$

n) $2x^3 + 7x^2 y - 4xy^2$

o) $2x^2 y - 5xy^2 - 3y^3$

p) $3x^2 - 7xy + 2y^2 + 19x - 13y + 20$

5. En los siguientes problemas obtenga el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$. Compruébense los resultados en la igualdad $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

	Dividendo ($P(x)$)	Divisor ($D(x)$)
a)	$2x^3 + 5x^2 - 22x + 15$	$2x - 3$
b)	$3x^3 + 14x^2 + 17x + 11$	$x + 3$
c)	$2x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 6$	$x^2 - x + 2$
d)	$8x^5 - 18x^3 - 6x^2 - 6x + 22$	$2x^2 - 5$
e)	$x^5 + 6x^3 + 3x^2 + 8x + 10$	$x^2 + 4$
f)	$4x^5 - x^4 + 12x^3 + 2x^2 + x + 5$	$4x^3 - x^2 + 1$
g)	$30x^2 - 11x^3 + 10x^5 - 7 - x$	$-3 + 5x^2$
h)	$x^6 - 1$	$x^2 + 1$
i)	$x^6 - y^6$	$x - y$
j)	$x^3 + \frac{20}{3}x^2 + 16x + 10$	$3x + 2$

6) Efectúe las operaciones indicadas:

a) $\dfrac{4}{2a+3b}+\dfrac{7}{3b-2a}$

b) $\dfrac{5}{a}-\dfrac{2}{a-b}$

c) $\dfrac{3x}{x^2+2x+1}-\dfrac{x^2}{x^2+4x+4}$

d) $\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x-1}$

e) $\dfrac{4}{x^2-3x-4}+\dfrac{3}{x^2-16}-\dfrac{7}{x^2+5x+4}$

f) $\dfrac{x^2-16}{x^2+3x}\times\dfrac{x+3}{x-4}$

g) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-15}$

h) $\dfrac{xy-x}{y^2-1}\times\dfrac{y+1}{x+2}\times\dfrac{2x+4}{5x}$

i) $\dfrac{r^3+8}{r^2+4r+4}\times\dfrac{r^2-2r}{8-2r-r^2}\div\dfrac{r^3-2r^2+4r}{r+4}$

j) $\left(\dfrac{2x+1}{x}-\dfrac{x}{2x+1}\right)\times\left(\dfrac{4x-3}{x}+\dfrac{x}{4x-3}\right)$

k) $\dfrac{\dfrac{1-2x}{4x^2+6x+2}}{\dfrac{x+4}{2x^2-5x-3}}$

l) $\dfrac{2+\dfrac{3a}{4a+b}}{\dfrac{5a}{4a+b}}$

m) $$\frac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2x}{2x-3}}{\dfrac{x^2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+2}}$$

Referencias

Keddy/Bittinger. *Algebra y trigonometría.* Fondo Educativo Interamericano.
Kramer. *Fundamentos de matemáticas.* McGraw-Hill.
Britton / Bello. *Matemáticas contemporáneas.* Harla.
Barnett. *Algebra y trigonometría.* McGraw-Hill.

Exponentes y radicales

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Resolver ejercicios con expresiones algebraicas cuyos exponentes sean números enteros positivos, negativos y fraccionarios.
2. Reducir, multiplicar y racionalizar expresiones con radicales.
3. Convertir expresiones con exponentes fraccionarios a expresiones con radicales.

5.1 Introducción

La palabra radical, que significa partidario de reformas absolutas en la política, tiene en matemáticas un significado diferente. Todos conocemos lo que representa, por ejemplo, raíz de cuatro, raíz cúbica de ocho, y la más famosa y sencilla de todas: raíz cuadrada de dos, el primer número inconmensurable descubierto por los griegos. En todas estas raíces aparece el símbolo radical $\sqrt{\ }$.

Hay también radicales compuestos, como $\sqrt{7} + \sqrt[5]{10}$. El símbolo radical lo utilizamos para representar la operación conocida como *radicación*, que como veremos en este capítulo es la operación inversa de la *potenciación*; de estas dos operaciones estudiaremos sus propiedades y la relación entre exponentes y raíces, de tal forma que complementemos el estudio de las expresiones algebraicas.

5.2 Exponentes enteros positivos

Recordemos que una expresión algebraica consta de estos elementos: signo, coeficiente y parte variable.

Ejemplo 1

$$15\, x^2\, y^3$$

La parte variable, en el ejemplo, consta de dos variables: x y y.

En x^2, el número 2 representa el exponente y x la base. De forma similar en y^3, y es la base y 3 el exponente.

x^2 representa la expresión $x \cdot x$

y^3 representa la expresión $y \cdot y \cdot y$.

Podemos decir, por tanto, que el exponente es el número que indica las veces que la base se toma como factor.

En términos generales, si "n" es un entero positivo y "a" es cualquier número real, el producto,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n veces}}$$

se puede escribir de la siguiente forma:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n veces } a} = a^n$$

En forma literal, a^n representa la "n-ésima potencia de a"

Ejemplos

1. $(4)\,(4)\,(4)\,(4)\,(4) = 4^5$
2. $(-2)\,(-2)\,(3) = (-2)^2\ (3)^1 = (-2)^2\ (3)$
3. $a \cdot k \cdot k \cdot k \cdot x \cdot x = a^1\ k^3\ x^2 = a\,k^3\ x^2$
4. $(-1)\,(-1)\,(-1) = (-1)^3$

Reglas para los exponentes

a) Considere el siguiente caso:

$(y^3)\,(y^2)$

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, podemos escribir $(y^3)\,(y^2)$ de la siguiente manera:

$(y \cdot y \cdot y)\,(y \cdot y)$

que indica que la "y" (base) se ha tomado 5 (exponente) veces como factor, así:

$y^3\ y^2 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$

En el ejemplo anterior, observe que se obtuvo el producto sumando los exponentes

$y^3 \cdot y^2 = y^{3+2} = y^5$

En términos generales, se dice que para encontrar el producto de potencias de igual base, se eleva dicha base a una potencia igual a la suma de los exponentes, esto es:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad (5.1)$$

Ejemplos

1. $10^4 \cdot 10^2 = 10^{4+2}$
2. $(-2)^3\ (-2)^2 = (-2)^{3+2}$
   $= (-2)^5$
3. $(x)\,(x^4)\,(x^5) = x^{1+4+5}$
   $= x^{10}$

b) Considere los siguientes casos:

i. $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3$ ($a^3 \cdot$ dos veces como factor)

$= (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a)$

$(a^3)^2 = a^6$

ii. $(k^5)^3 = k^5 \cdot k^5 \cdot k^5$ ($k^5 \cdot$ tres veces como factor)

$= (k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k)(k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k)(k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k)$

$(k^5)^3 = k^{15}$

Observe que para elevar una potencia a otra potencia multiplicamos los exponentes entre sí.

Sin entrar a demostrar formalmente, podemos decir que:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \qquad (5.2)$$

Ejemplos

1. $[(-1)^2]^4 = (-1)^{2 \times 4} = (-1)^8$
   $= 1$
2. $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$
3. $(r^4)^5 = r^{4 \times 5} = r^{20}$

c) En la siguiente expresión algebraica, la base es un producto.

$(2x)^4 = (2x)(2x)(2x)(2x)$

$= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(x \cdot x \cdot x \cdot x)$ por propiedad asociativa

$= 2^4 \cdot x^4$

luego $(2x)^4 = 2^4 \cdot x^4$

Observe que cada factor de la base fue elevado al exponente considerado.

En términos generales, podemos afirmar que un producto elevado a una potencia "n" es igual a una expresión donde cada factor es elevado a dicha potencia, esto es:

$$\boxed{(a\,b)^n = a^n\, b^n} \qquad (5.3)$$

Ejemplos

1. $(\frac{1}{2}x)^3 = (\frac{1}{2})^3\, x^3$
2. $(4mn)^2 = 4^2\, m^2\, n^2$
   $= 16\, m^2\, n^2$
3. $(-2\,k\,x\,y)^8 = (-2)^8\, k^8\, x^8\, y^8$
   $= 256\, k^8\, x^8\, y^8$

d) Considere la siguiente expresión:

$\frac{x}{y}\ \frac{x}{y}\ \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y}$ (por producto de fracciones)

$= \frac{x^3}{y^3}$

Observe que ambos elementos de la fracción, fueron elevados a la misma potencia; 3 en este caso.

En general, decimos que para elevar un cociente a una potencia n, se eleva tanto el numerador como el denominador de la fracción a dicha potencia; ésto es:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{para } b \neq 0}. \tag{5.4}$$

e) Observe cada uno de los siguientes casos particulares:

i. $$\frac{m^5}{m^4} = \frac{m \times m \times m \times m \times m}{m \times m \times m \times m} = m$$

simplificado

$$\frac{m^5}{m^4} = m^{5-4}$$

$$= m^1 = m$$

ii. $$\frac{x^2}{x^4} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x} \cdot \frac{1}{x \cdot x}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

simplificado

$$\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^{4-2}} = \frac{1}{x^2}$$

iii. $$\frac{k^3}{k^3} = \frac{k \cdot k \cdot k}{k \cdot k \cdot k} = 1$$

Para el caso i note que $5 > 4$ y $m \neq 0$.

Generalizando, se tiene que para encontrar el cociente de dos potencias de igual base, se eleva dicha base a una potencia igual a la diferencia de los exponentes; esto es:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{para } m > n} \tag{5.5}$$

Para el caso ii note que $4 > 2$ y $x \neq 0$.

En general se tiene que para encontrar el cociente de dos potencias de igual base (con exponente mayor en el divisor), se eleva dicha base a una potencia igual a la diferencia de los exponentes; esto es:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{para } n > m} \tag{5.6}$$

Para el caso iii note que las expresiones son iguales; por tanto, podemos afirmar que el cociente de dos potencias de igual base y de igual exponente es igual a 1, es decir:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} \quad = \quad 1 \qquad \text{para } m = n} \tag{5.7}$$

Ejemplos

1. $$\frac{32\,x^3}{8\,x} = \frac{2^5\ x^3}{2^3\ x^1} = 2^{5-3} \cdot x^{3-1}$$
$$= 2^2 \cdot x^2$$
$$= 4\,x^2$$

2. $$\frac{5y^4}{125\,y^6} = \frac{5^1\ y^4}{5^3\ y^6} = \frac{1}{5^{3-1}\ y^{6-4}}$$
$$= \frac{1}{5^2\ y^2}$$
$$= \frac{1}{25y^2}$$

3. a) $$\frac{b^5}{b^5} = 1$$

b) $$\frac{x^2\ y^4}{x^2\ y^4} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^2} = 1$$

En todos los ejemplos anteriores observe que el resultado final se expresa siempre con exponentes positivos, que es el objetivo de esta sección. Sin embargo, ésta no es la única manera de expresarlo; en posteriores capítulos encontrará distintas formas de hacerlo.

5.3 Exponente cero y exponentes negativos

Considere los siguientes casos:

$$m^3 \cdot m^0 = m^{3+0} \qquad \text{(por 5.1)}$$
$$= m^3$$
$$x^4 \cdot x^0 = x^{4+0}$$
$$= x^4$$

Observe que tanto al multiplicar por m^0, como por x^0, las expresiones m^3 y x^4, respectivamente, no se alteran.

Podemos definir entonces, que para cualquier número real x distinto de cero se tiene que

$$\boxed{x^0 = 1} \tag{5.8}$$

Considere la siguiente definición para los casos donde los exponentes son enteros negativos:

Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a}$ es llamado inverso multiplicativo de a (*véase* **R7**).

El símbolo a^{-1} se usa con cierta frecuencia a cambio de $\frac{1}{a}$ luego entonces

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}} \tag{5.9}$$

Ahora podemos examinar estos casos particulares:

$$x^{-4} = x^{(-1)\,(4)} = (x^{-1})^4 \text{ (por 5.2)}$$

$$= \underbrace{x^{-1}\ x^{-1}\ x^{-1}\ x^{-1}}_{\text{4 veces como factor}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{x}\ \frac{1}{x}\ \frac{1}{x}\ \frac{1}{x}} \qquad \text{(por 5.9)}$$

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$a^{-2} = a^{-1}\ a^{-1} = \frac{1}{a}\ \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a^2}$$

Luego en términos generales, podemos definir los exponentes enteros negativos de la siguiente forma:

Si "a" es un número real diferente de cero y "n" es un entero positivo se tiene que:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \tag{5.10}$$

Sin entrar a demostrar formalmente, se puede afirmar que las leyes de los exponentes positivos se cumplen para el caso de los exponentes negativos.

Por ejemplo, para resumir las leyes en los casos del cociente de dos potencias de bases iguales, se define para cualquier m y n enteros y $a \neq o$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \tag{5.11}$$

Ejemplos

1. $$\frac{2^6\ x^3\ y^2}{2^3\ x^4\ y^5} = 2^{6-3}\ x^{2-4}\ y^{2-5} = 2^3\ x^{-2}\ y^{-3}$$

2. $$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 m\ n^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{14} m^5\ n^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-14}\ m^{1-5}\ n^{2-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} m^{-4}\ n^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} m^{-4}$$

5.4 Radicales

Una expresión de la forma $a^{\frac{1}{n}}$, con $a \in \mathbb{R}+$, se puede representar así:

$\sqrt[n]{a}$ que se lee "raíz n-ésima de a"

en donde n: es el índice de la raíz

a: cantidad subradical

$\sqrt{\ }$: símbolo radical

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a \in \mathbb{R}+} \qquad (5.12)$$

Ejemplos

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = +3$$
$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = +2$$
$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = +2$$
$$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Observe en los ejemplos anteriores lo siguiente:

1. Donde el índice es un número par, la raíz es únicamente el número positivo que satisface la siguiente relación:

   $\sqrt[n]{a} = b$ si, y sólo si, $b^n = a$

   Note que aunque $(-3)^2 = 9$, la raíz de 9 es solamente $+3$.

   $\sqrt[2]{9} = +3$

   Usualmente $\sqrt[2]{a}$ se escribe como $\sqrt{a}$, omitiendo el índice del radical.

2. Donde el índice es un número impar entonces, si la cantidad subradical es positiva la raíz es positiva, y en donde la cantidad subradical es negativa la raíz es negativa.

   A continuación expondremos algunas propiedades de los radicales, que ilustraremos con ejemplos:

Como $a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}}$

$$= (a^m)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(por 5.2)}$$
$$= \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{(por 5.1)}$$

luego

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}} \tag{5.13}$$

Ejemplos

1. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$
   $= \sqrt[3]{64} = 4$
2. $\sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$
3. $\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{2^3 x^3}\right)^2 = \left[(ax)^{\frac{3}{4}}\right]^2 = (2x)^{\frac{3}{2}}$

Como $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(por 5.1)}$$

$$= (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(por 5.3)}$$

$$= \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \text{(por 5.1)}$$

entonces,

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}} \tag{5.14}$$

Ejemplos

1. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$
2. $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{3a^2} \cdot 4\sqrt[3]{9ab^3} = \dfrac{12}{8}\sqrt[3]{3a^2 \times 9ab^3}$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{27a^3b^3}$$

$$= \frac{3}{2}(3ab)$$

$$= \frac{9}{2}\,ab$$

Como $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{(por 5.1)}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(por 5.1)}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \text{(por 5.1)}$$

entonces,

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \qquad (5.15)$$

Ejemplos

1. $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}}$$
$$= \sqrt{x-1}$$

2. $$\frac{\sqrt{48x^3y}}{4\sqrt{3xy^3}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{48x^3y}{3xy^3}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{16x^2y^{-2}}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 4 \cdot \frac{x}{y}$$
$$= \frac{x}{y}$$

Como $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad \text{(por 5.1)}$$
$$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad \text{(por 5.4)}$$

$$= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} \qquad \text{(por 5.2)}$$

$$= a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

$$= \sqrt[mn]{a} \qquad \text{(por 5.1)}$$

entonces,

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}} \tag{5.16}$$

Ejemplos

1. $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3\cdot 2]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}}$
$= \sqrt[3]{27} = 3$

2. $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[5\cdot 2]{1024} = \sqrt[5]{\sqrt{1024}}$
$= \sqrt[5]{32} = 2$

$$\boxed{\text{si } \; a \geqslant 0, \text{ entonces} \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a}\,)^m} \tag{5.17}$$

Ejemplo 2

Observe que:

$$\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$$

mientras que

$$\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$(\sqrt{-9}\,)^2 \; : \text{ no existe}$$

Observe que:

1. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$
$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 = |5|$

luego

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ esto es } \sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{aligned} (-2)^2 &= +4 \\ 2^2 &= +4 \\ (-3)^4 &= +81 \\ (3)^4 &= +81 \end{aligned}$$

No es difícil verificar que si n es un número par, a^n es positivo para cualquier valor de a, $a \neq 0$; luego $\sqrt[n]{a}$ para n par, existe[15] si, y solamente si, $a \geqslant 0$.

Ejemplos

$$\begin{aligned} \sqrt{36} &= 6 \\ \sqrt[4]{64} &= 2.8284 \\ \sqrt{-3} &= \text{no existe} \\ \sqrt{-9} &= \text{no existe} \\ \sqrt{2} &= 1.4142 \end{aligned}$$

5.5 Racionalización

Racionalizar es un procedimiento que tiene por objeto eliminar los radicales en algunas expresiones algebraicas, bien sea de un numerador o de un denominador.

Caso 1: La expresión a racionalizar tiene un único término. Observe que:

1. $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, en este caso hemos eliminado el radical del denominador.

2. $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{5} = \dfrac{6^{\frac{1}{3}}}{5} \cdot \dfrac{6^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{6^{\frac{3}{3}}}{5(6^{\frac{2}{3}})} = \dfrac{6}{(5)\sqrt[3]{36}}$

en este caso hemos eliminado el radical del numerador.

3. $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{12} = \dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{12} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{3^{\frac{4}{4}}}{12(3^{\frac{1}{4}})} = \dfrac{3}{12\sqrt[4]{3}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{3}}$

---

[15] Decimos que no existe, en el sentido de que no es número real.
Si $i = \sqrt{-1}$, entonces $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\,\sqrt{4} = 2i$, que es una solución en los números complejos.

en este caso, hemos eliminado el radical del numerador.

4. $$\frac{8}{\sqrt{27}} = \frac{8}{\sqrt{3^3}} = \frac{8}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{3^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{8(3^{\frac{1}{2}})}{3^{\frac{4}{2}}} = \frac{8\sqrt{3}}{3^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$, y hemos eliminado el radical del denominador

En general, para eliminar un radical en una expresión algebraica de un solo término, multiplicamos por una expresión tal que el nuevo exponente sea entero.

$$\sqrt[n]{a^m} = \frac{a^{\frac{m}{n}} \quad a^{\frac{a}{n}}}{a^{\frac{a}{n}}} \qquad (5.18)$$

con $a /\ m + a = kn, \quad k \in Z$

Caso 2: La expresión a racionalizar tiene dos términos con raíces cuadradas. Observe que:

1. $$\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3} = \frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

Hemos eliminado los radicales del denominador.

2. $$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

En este caso también hemos eliminado los radicales del denominador

A la expresión $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ se le llama el conjugado de $\sqrt{6}+\sqrt{3}$. Igualmente, $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ es el conjugado de $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

En forma general, entonces $a+b$ es el conjugado de $a-b$, y $a-b$ es el conjugado de $a+b$.

Podemos generalizar que para eliminar los radicales de índice 2 de una expresión con dos términos, multiplicamos por la conjugada.[16] Además de ser utilizado para eliminar los radicales, este procedimiento es de gran importancia en las aplicaciones que se puedan realizar más adelante.

Ejemplos

1. Racionalice el denominador:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(2\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}$$

$$=\frac{2a-\sqrt{ab}+b}{4a-b}$$

2. Racionalice el numerador:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{5})}{3}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{(2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3)-5}{\sqrt{6}+\sqrt{9}+\sqrt{15}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{15}+3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{2(\sqrt{6})^2}{\sqrt{36}+\sqrt{90}+3\sqrt{6}}=\frac{12}{6+\sqrt{90}+3\sqrt{6}}$$

Observe que aunque inicialmente el numerador era un trinomio, simplemente asociamos para conformar un binomio.

3. Considere la siguiente expresión:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

observe que:

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}=$$

---

[16] Observe que al multiplicar por la conjugada obtenemos una suma por una diferencia, que da una diferencia de cuadrados, que finalmente elimina las raíces cuadradas. Para el caso de raíces con índice 3, se procede como en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\frac{(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}=$$

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}=\frac{a-b}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}$$

$$\frac{(x-a)\,(\sqrt{x}+\sqrt{a}\,)}{(x-a)};\ x \neq a$$

$= \sqrt{x} + \sqrt{a}$, que es una expresión más sencilla de evaluar que la inicial.

4. $$\frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}} = \frac{(x+5)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(x+5)\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}\,)}{(\sqrt{x+1}\,)^2-(\sqrt{2x-3}\,)^2}$$

$$= \frac{(x+5)\,[\sqrt{(x+1)}-\sqrt{(2x+3)}\,]}{x+1-(2x-3)}$$

$$= \frac{(x+5)\,[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}\,]}{x+1-2x+3}$$

$$= \frac{(x+5)\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}\,)}{-x+4}$$

$$= \frac{(x+5)\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}\,)}{4-x}$$

5.6 Resumen

Recuerde que:

1. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n veces}} = a^n$

2. Reglas de los exponentes:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{para } n > m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ para } m = n$$

$$x^0 = 1 \text{ para todo } x$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Radicales

3. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \forall a > 0$ (definición)

4. Reglas de los radicales

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a}\,)^m \;, \forall\, a \geqslant 0$$

5. $|\,x\,| = \sqrt{x^2}$

6. $a \pm b$ es la conjugada de $a \pm b$

5.7 Ejercicios y problemas

1. Resuelva:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \left(\frac{1}{4}\right)^5$

c) $(-3)^4$

d) $3^{-2} + (-2)^3$

e) $(3^{-2})^{-3}$

f) $\frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2^3}{3} \cdot \frac{3^2}{2}$

g) $((0{,}5)^4)^{-2}$

h) $(-2)^{-2}$

2. Simplifique, dando sus respuestas sin exponentes negativos.

a) $\dfrac{(3a^7)(2a^5)}{24\,a^{15}}$

b) $(y^3\ x^2)(-3\,x^2\ y^{-3})^{-3}\ (2\,x^{-2}\ y^5)^2$

c) $(x^{-2}\ y^{-3})^{-2}$

d) $\left(\dfrac{-5\,x^2}{4x^3}\right)^3$

e) $\left(\dfrac{2x}{y}\right)^3\ \left(\dfrac{-y}{2x}\right)^{-2}$

f) $\dfrac{a^{-2}\ \ b^{-2}}{(a^{-1}\,b^{-1})^2}$

g) $\left(\dfrac{192\,x^{-2}\ y^4\ z^{-3}}{32\,x^4\ y^{-6}\ z^2}\right)^2$

3. Solucione el anterior ejercicio expresando sus respuestas sin denominadores.

4. Simplifique:

a) $\sqrt[3]{64x^4\,y^{-6}}$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{96\,a^7}{y-3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{64\,a^{12}\ b^{24}}}$

d) $\sqrt{192}$

e) $\sqrt{5xy}\ \cdot\ \sqrt[3]{2x^2\ y^3}$

f) $\sqrt{4x^2 + 4xy + y^2}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{27\ x^{-6}y}{729\,y^{-5}}}$

5. Simplifique:

a) $3a^{\frac{2}{3}}\ \cdot\ a^{\frac{4}{3}}$

b) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{5}{6}}}{x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{8}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

c) $\sqrt{a^3 \sqrt[3]{a^2}}$

d) $\dfrac{\left(a^{-\frac{1}{4}}\, b\right)^{-2}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{3}}\right)^{3}}$

e) $\dfrac{(m^{-4} \cdot n)^{-\frac{1}{2}}}{(m^2\, n^3)^{-\frac{1}{3}}}$

6. Racionalice

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{-4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{x-2}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}}$

e) $\dfrac{3}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{8}}$

f) $\dfrac{-3}{\sqrt{7}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

h) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$

i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x-4}}$

j) $\dfrac{7}{2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{3}}$

7. Efectúe las operaciones indicadas y racionalice los denominadores de las respuestas.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{1}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

d) $\dfrac{x^2}{1+\sqrt{x}} \times \dfrac{4}{1-\sqrt{x}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt{125}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{11}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

g) $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}-3} - \dfrac{1}{x^2}$

h) $\dfrac{2}{3+\sqrt{1+2x}} \times \dfrac{3}{3-\sqrt{1+2x}}$

Referencias

Lovaglia, Florence. *Algebra*. Harla.
Barnett, Raymond. *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. McGraw-Hill.
Swokowski, Earl. *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamericano.

CAPITULO **6**

Ecuaciones

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas en una variable, utilizando diferentes métodos.
2. Solucionar ecuaciones en dos variables.
3. Resolver sistemas de ecuaciones con dos y tres variables.
4. Utilizar la solución de ecuaciones para resolver problemas de aplicación.

6.1 Introducción

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas, denominadas incógnitas.

Las ecuaciones se han estudiado desde hace mucho tiempo. Diofanto (325 - 409 D.C.) fue el primero en enunciar una teoría para la solución de las ecuaciones de primer grado, y también el primero en encontrar una fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado.

Tartaglia (1499-1557) y Cardano (1501-1576) se disputan el hallazgo de una fórmula para la solución de las ecuaciones de tercer grado.

Niels Herrik Abel demostró la imposibilidad de encontrar una fórmula para las ecuaciones de quinto grado o más.

Existen diferentes tipos de ecuaciones de acuerdo a las expresiones que las conforman: ecuaciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales, etc. En este capítulo trataremos únicamente las ecuaciones algebraicas, y dentro de éstas las lineales, las cuadráticas y los sistemas de ecuaciones.

6.2 Ecuaciones

Como dijimos anteriormente, una ecuación es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas o incógnitas.

Ejemplos

$x + 5 = 2$

$\operatorname{sen} x - 2 \cos x = \dfrac{1}{2}$

$3x^2 + 5x - 1 = 3$

$2x + 3 = 5$

$$\frac{x+1}{x} = -2$$

Un problema frecuente en matemáticas es encontrar la solución de una ecuación dada. La solución de una ecuación es el subconjunto S de U, formado por los elementos de U que verifican la ecuación dada. S, se llama con frecuencia el *conjunto solución* y es por consiguiente el conjunto de verdad de la proposición definida por la ecuación dada.

Ejemplos

a) Sea U el conjunto de los reales, entonces el conjunto solución de $2x + 5 = 11$ es $S = \{3\}$ ya que si se remplaza 3 en x, la igualdad se cumple:

$$2 \cdot 3 + 5 = 11$$
$$6 + 5 = 11$$
$$11 = 11$$

b) Sea U el conjunto de los enteros. Entonces el conjunto solución de $2x = 5$ es $S = \phi$ ya que $\frac{5}{2}$ que sería el valor que verificara la ecuación dada, no está en el conjunto de los enteros.

6.3 Ecuaciones lineales en una variable

Una ecuación lineal de una variable tiene la forma corriente de:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Se llama lineal porque el exponente de x es uno. La presencia de términos que tengan exponentes diferentes de 1 (por ejemplo x^2, x^{-1}, x^3) en una ecuación, la excluye de aquellas consideradas lineales o de primer grado.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento usual para encontrar la solución de una ecuación de primer grado:

$$4x + 2 = 10 \tag{1}$$

Restando 2 de ambos miembros obtenemos una ecuación más sencilla,

$$4x = 8 \tag{2}$$

después, dividiendo ambos miembros entre 4, obtenemos otra ecuación más sencilla aún;

$$x = 2 \tag{3}$$

por consiguiente, el conjunto solución es $S = \{2\}$

En el ejemplo anterior realizamos el siguiente procedimiento: transformamos la ecuación inicial (1) en otra cada vez más sencilla, pero siempre equivalente, hasta obtener la solución (3).

Definición: Dos o más ecuaciones son equivalentes si, y solamente si, tienen el mismo conjunto solución.

La transformación de una ecuación en otra más sencilla es resultado de la aplicación de una serie de propiedades que permitan expresar la ecuación inicial en una equivalente. Estas propiedades son:

P1: Adición y sustracción: Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces,

$a = b$, $a + c = b + c$ y $a - c = b - c$ son equivalentes.
En otras palabras, se puede sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de una igualdad sin que ésta se altere.

P2: Multiplicación y división: Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces,

$a = b$, $ac = bc$ y $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$ $c \neq 0$, son equivalentes.

Es decir, se puede multiplicar o dividir a ambos lados de la igualdad por el mismo número (diferente de cero) y ésta no se altera. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de estas operaciones.

a) Resuelva la ecuación $2x - 5 = x + 6$.

Primero, se suma 5 a ambos lados para obtener

$$2x - 5 + 5 = x + 6 + 5$$
$$2x = x + 11$$

Después restamos x a lado y lado y se obtiene

$$2x - x = x - x + 11$$
$$x = 11$$

Por consiguiente el conjunto solución es $S = \{11\}$

b) Resuelva la ecuación $5x - 5 = 2x + 9$.

Se suma 5 a ambos lados y se obtiene

$$5x = 2x + 14$$

Se resta $2x$ a ambos lados y se obtiene

$$3x = 14$$

Finalmente se dividen ambos lados entre 3 y se obtiene

$$x = \frac{14}{3}$$

El conjunto solución es $S = \left\{\dfrac{14}{3}\right\}$

Los ejemplos anteriores se resolvieron utilizando en forma rigurosa las propiedades P1 y P2; sin embargo, estas dos propiedades dan cabida a ciertas reglas que son las que se utilizan en la práctica y que podemos resumir así: *En una ecuación, cualquier expresión puede ser trasladada de un miembro a otro realizando la operación contraria a la inicial*, así:

Si está sumando, pasa a restar; si está restando, pasa a sumar; si está multiplicando, pasa a dividir y si está dividiendo, pasa a multiplicar.

Ejemplo 1

$$\frac{9}{5}x + 3 = \frac{2}{3} - 4x$$

$$\frac{9}{5}x + 4x = \frac{2}{3} - 3$$

$$\frac{9x + 20x}{5} = \frac{2 - 9}{3}$$

$$\frac{29x}{5} = -\frac{7}{3}$$

$$29x\,(3) = -7\,(5)$$

$$87x = -35$$

$$x = -\frac{35}{87}$$

6.4 Ecuaciones cuadráticas en una variable

Una ecuación cuadrática es una expresión de *segundo* grado, cuya forma estándar es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son reales y $a \neq 0$. Si a es igual a cero desaparece el término en x^2 y la ecuación ya no es de segundo grado.

Son ecuaciones cuadráticas o de segundo grado:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$3y^2 + 7y = 0$$

$$(2x + 1)^2 = x\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Para resolver ecuaciones cuadráticas se utilizan varios métodos; aquí estudiaremos los siguientes:

Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a) Resuelva la ecuación

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

Esta ecuación se puede escribir como una ecuación equivalente pero factorizada.

$$(x + 8)\,(x + 2) = 0$$

Ahora se emplea la propiedad del sistema de números reales, que dice que un producto de dos números reales es cero si, y solamente si, al menos uno de ellos es cero. Por tanto, la ecuación anterior es verdadera si, y solamente si,

$x + 8 = 0$, entonces $x = -8$

o bien

$x + 2 = 0$, entonces $x = -2$,

Así el conjunto solución de la ecuación dada es $S = \{-8, -2\}$.

Esto significa que la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$ tiene dos soluciones. Podemos comprobar que -8 y -2 son soluciones, remplazando estos valores en la ecuación por x, y ambos valores satisfacen la ecuación:

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

para $x = -8$ $\quad (-8)^2 + 10(-8) + 16 = 0$

$$64 - 80 + 16 = 0$$

para $x = (-2)$ $\quad (-2)^2 + 10(-2) + 16 = 0$

$$4 - 20 + 16 = 0$$

$$0 = 0$$

b) Resuelva la ecuación

$x^2 - 25 = 0$

La ecuación equivalente factorizada es:

$$(x-5)(x+5) = 0$$

luego $\quad x = 5$ y $x = -5$

La solución de la ecuación es $S = \{5, -5\}$ y, como en el ejemplo anterior, podemos comprobar que éste es el conjunto solución.

c) Resuelva la ecuación

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$
$$(x-1)(2x+7) = 0$$

entonces,

$x - 1 = 0$ ó $2x + 7 = 0$

de donde

$x = 1$ ó $x = -\dfrac{7}{2}$

Recuerde que no todas las expresiones de la forma $ax^2 + bx + c$ son factorizables, es decir, que este método no se podrá aplicar en todos los casos; de ahí la necesidad de estudiar otros métodos de solución.

Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Algunas expresiones cuadráticas son trinomios cuadrados perfectos.

Como: $\quad x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

$\quad\quad 9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$

Sin embargo, aunque no todos los trinomios son cuadrados perfectos, siempre es posible completar el cuadrado.

Este proceso de *completar el cuadrado* se utiliza para resolver ecuaciones cuadráticas, sólo que en este caso el cuadrado se completa con el término independiente.

Ejemplos

a) Resuelva la ecuación $x^2 + 5x + 3 = 0$

Restamos de cada lado 3 y obtenemos: $x^2 + 5x = -3$

Para completar el cuadrado sumamos a lado y lado de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x o sea $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

así,

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = -3 + \frac{25}{4}$$

La ecuación equivalente a ésta es:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

Extrayendo raíces en ambos miembros, obtenemos:

$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$$

entonces,

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$$

b) Resuelva:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + x = -1$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

Como $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ no es un número real, entonces la ecuación no tiene solución.

Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula

Dada la ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$, a 0, aplicando el método anterior se tiene que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{6.1}$$

se denomina *fórmula para la solución de una ecuación cuadrática de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual los valores de a, b y c son respectivamente los coeficientes de la variable al cuadrado, la variable lineal y el término independiente.

El símbolo ± en la fórmula significa que hay dos soluciones; una utilizando el signo más y la otra, el signo menos.

Ejemplos

a) Resuelva: $x^2 + x - 1 = 0$

donde $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$

entonces

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

b) Resuelva: $x^2 - 2x - 48 = 0$
Los coeficientes en este caso son:

$a = 1$

$b = -2$

$c = -46$

Sustituyendo estos datos en la fórmula, se obtienen las dos raíces o soluciones:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 14}{2}$$

$x_1 = 8$

$x_2 = -6$

c) Resuelva: $x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1, b = -10, c = 25$

$$x = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot(25)}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm 0}{2}$$

$x = 5$

La única raíz que se encuentra es $x = 5$.

d) Solucione: $3x^2 + 4x + 4 = 0$

entonces, $a = 3, b = 4, c = 4$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 48}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6}$$

Como la raíz cuadrada de -32, no es un número real; no existen raíces reales para la ecuación.

De acuerdo a los ejemplos anteriores, podemos concluir que:
Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos raíces reales.
Si $b^2 - 4ac = 0$, existe una sola raíz real.
Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen raíces reales.

6.5 Casos especiales

No siempre las ecuaciones lineales y/o cuadráticas presentan la forma estándar $ax + b = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$, sino que en muchas ocasiones éstas inicialmente presentan otras formas con fracciones, radicales, etc. En estos casos necesitamos transformar la ecuación original en una ecuación equivalente, utilizando las propiedades (P1 y P2) y las operaciones descritas anteriormente.

Ecuaciones que contienen fracciones algebraicas:

Un ejemplo de ecuación con fracciones algebraicas es:

$$\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = 5 \qquad (6.2)$$

$$\frac{7(x+1) - 6}{x^2 - 1} = 5$$

$$\frac{7x + 7 - 6}{x^2 - 1} = 5$$

$$7x + 1 = 5(x^2 - 1)$$

$$7x + 1 = 5x^2 - 5$$

$$-5x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

Ahora, utilizando la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5(-6)}}{10}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{10}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{10}$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{10}$$

$$x_1 = \frac{7+13}{10}, \quad x_2 = \frac{7-13}{10}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{3}{5}$$

Ejemplo 2

Resuelva: $$\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x+1} = \frac{-2}{x+2} \qquad (6.3)$$

Realizando las operaciones indicadas, obtenemos:

$$\frac{x(x+1) - 4(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + x - 4x - 8}{(x+2) - (x+1)} = \frac{-2}{x+2}$$

$$x^2 - 3x - 8 = \frac{-2(x+2)(x+1)}{(x+2)}$$

$$x^2 - 3x - 8 = -2x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \text{ factorizando}$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \text{ y } x = -2$$

En algunos casos la solución obtenida para la forma estándar no satisface la ecuación original. De hecho, en este caso $x = -2$ no es una solución de la ecuación original (6.3), ya que al remplazar la x por -2, obtenemos denominadores iguales a cero.[17] En este caso $x = -2$ se denomina una solución aparente.

Ecuaciones que contienen radicales:

Ejemplo 3

$$2\sqrt{x+4} - x = 1$$

$$2\sqrt{x+4} = 1 + x$$

En este caso, para suprimir el radical elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$(2\sqrt{x+4})^2 = (1+x)^2$$

[17] Para todo a, $\frac{a}{0}$ no está definido.

Obtenemos

$$4(x+4) = 1 + 2x + x^2$$
$$4x + 16 = 1 + 2x + x^2$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Luego factorizando

$$(x-5)(x+3) = 0$$
$$x = 5 \text{ y } x = -3$$

Si remplazamos en la ecuación inicial los valores obtenidos, $x = 5$ y $x = -3$ comprobamos que efectivamente son soluciones.

Ejemplo 4

$$\sqrt{x+13} - \sqrt{7-x} = 2$$
$$\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{7-x}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para eliminar el radical del miembro izquierdo.

$$(\sqrt{x+13})^2 = (2+\sqrt{7-x})^2$$

Obtenemos

$$x + 13 = 4 + 4\sqrt{7-x} + (7-x)$$

ordenando,

$$2x + 2 = 4\sqrt{7-x}$$

Elevamos nuevamente al cuadrado para eliminar el radical

$$(2x+2)^2 = (4\sqrt{7-x})^2$$

obtenemos,

$$4x^2 + 8x + 4 = 16(7-x)$$
$$4x^2 + 8x + 4 = 112 - 16x$$
$$x^2 + 6x - 27 = 0$$
$$(x-3)(x+9) = 0$$
$$x = 3 \text{ y } x = -9$$

Al remplazar en la ecuación inicial el valor de x por 3, vemos que efectivamente es una solución de la ecuación, mientras que no sucede lo mismo con el valor $x = -9$.

$$\sqrt{-9+13} - \sqrt{7-(-9)} = 2$$
$$\sqrt{4} - \sqrt{16} = 2$$
$$2 - 4 = 2$$
$$-2 \neq 2$$

En este caso $x = -9$ es una solución aparente.

Nota: Siempre que estemos resolviendo ecuaciones especiales, se hace necesario verificar las soluciones en la ecuación original para desechar las soluciones aparentes.

El siguiente diagrama ilustra el procedimiento a seguir para solucionar cualquier ecuación de grado menor o igual a 2.

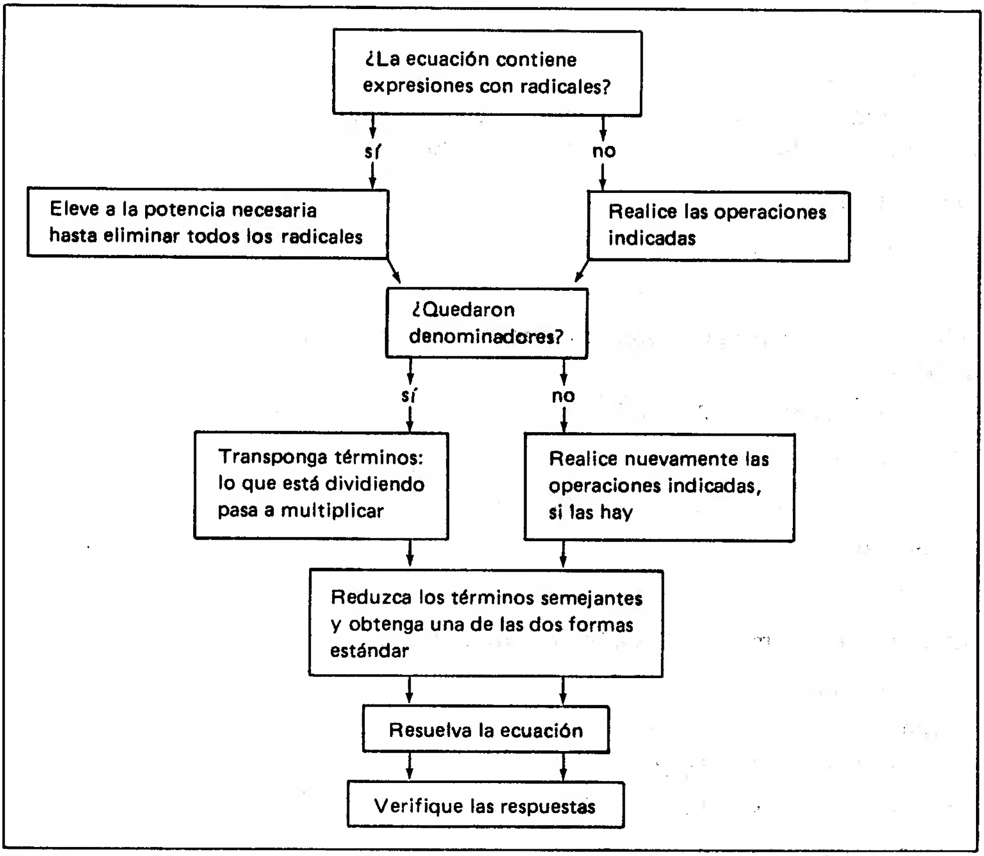


Diagrama para la solución de ecuaciones.

Ejemplo 5

Resuelva:

$$\frac{(2x)^2}{4x^2 + 3x + 2} - \frac{x}{x+1} = 0$$

$$\frac{(2x)^2}{4x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{(2x)^2}{4x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{4x^2}{4x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{x+1}$$

$$4x^2\ (x+1) = x\,(4x^2 + 3x + 2)$$
$$4x^3 + 4x^2 = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$4x^2 - 3x^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \text{ y } x = 2$$

6.6 Solución de problemas

Aprender a solucionar ecuaciones como las que hemos estudiado en las secciones anteriores, tiene sentido en la medida en que las apliquemos para resolver problemas.

No hay una regla general para resolver problemas de aplicación, ya que los hay de muy diferentes tipos, sin embargo, podemos establecer las siguientes estrategias o pasos para su solución:

a) Leer detenidamente la situación que plantea el problema hasta familiarizarse con ella.

b) Hacer un esquema o dibujo, si tiene sentido hacerlo, que aclare la situación.

c) Hacer una lista de los datos conocidos y otra de los datos que se quieren determinar.

d) Representar el término desconocido por medio de una variable, por ejemplo x.

e) Expresar todas las demás cantidades en términos de x.

f) Expresar la situación descrita en el problema en símbolos matemáticos; esto es, plantear la o las ecuaciones.

g) Resolver la ecuación según los métodos aprendidos.

h) Comprobar si la solución hallada se ajusta a la situación descrita en el problema.

A continuación mostramos varios ejemplos que ilustran estos pasos.

Caso 1: **División de una cantidad en dos partes**

Trataremos aquí todos los casos en los que una cantidad inicial "C", se quiere repartir en dos partes. El procedimiento que debe seguirse será llamar siempre "X" a una de las dos cantidades y por consiguiente "C–X" a la otra cantidad. Los siguientes ejemplos ilustran este caso 1.

Ejemplo 6

Cierta fundación debe invertir 6 millones de pesos en dos tipos de bonos que pagan dividendos anuales del 8% y 9%, respectivamente. ¿Qué cantidad debe invertir en cada uno para obtener un interés de $505,000 anual?

Solución:
Sea x la cantidad a invertir al 8%; entonces $6{,}000{,}000 - x$ será la cantidad a invertir al 9%.

C pesos colocados a una tasa del $r\%$ producen un interés I, $I = Cr/100$	(6.4)

Por lo anterior

$$505{,}000 = x\,8\% + (6{,}000{,}000 - x)\,9\%$$

$$505{,}000 = \frac{8x}{100} + \frac{(6{,}000{,}000 - x)\,9}{100}$$

$$-50{,}500{,}000 = 8x + 54{,}000{,}000 - 9x$$

$$x = 3{,}500{,}000$$

Luego la cantidad a invertir al 8% será de \$3,500,000 y al 9% de \$2,500,000

Ejemplo 7

En un almacén de calzado hay 500 pares de zapatos de dos marcas diferentes, cuyos precios son \$8,000 y \$13,500. La venta de los 500 pares produjo ingresos de \$4,962,500. ¿Cuántos pares de zapatos de cada marca se vendieron?

Solución:

Sea x la cantidad de pares de zapatos vendidos a \$8,000
$500 - x$ la cantidad vendida a \$13,500

El ingreso R, obtenido al vender x artículos a p pesos es $R = xp$	(6.5)

por lo anterior,

$$4{,}962{,}500 = 8{,}000x + 13{,}500\,(500 - x)$$

$$4{,}962{,}500 = 8{,}000 + 6{,}750{,}000 - 13{,}500x$$

$$5{,}500x = 1{,}787{,}500$$

$$x = \frac{1{,}787{,}500}{5{,}500}$$

$$x = 325$$

luego los pares de zapatos vendidos a \$8,000 son 325 y los vendidos a \$13,500 son 175.

Caso 2: **Donde una cantidad es igual a tantas veces otra.**

El procedimiento a seguir en este caso será llamar x la cantidad considerada inicialmente y a nx, donde $n \in \mathbb{R}$, la otra cantidad.

Ejemplo 8

El costo para producir un par de zapatos es de \$5,700 y depende de la materia prima y de la mano de obra. Si el costo de la materia prima es el triple del costo de la mano de obra, ¿cuál es el costo de la materia prima y de la mano de obra?

Solución:

Sea x: costo de la mano de obra

entonces,

$3x$: costo de la materia prima

luego,

$$x + 3x = 5{,}700$$

$$4x = 5{,}700$$

$$x = \frac{5{,}700}{4}$$

$$x = 1{,}425 \quad \text{costo de la mano de obra}$$

$$3x = 3(1{,}425)$$

$$= 4{,}275 \quad \text{costo de la materia prima}$$

Ejemplo 9

Una fábrica de camisas paga \$140,000 de arriendo por el local donde confecciona y vende sus camisas. El costo del material es la mitad de la mano de obra. ¿Cuánto paga por mano de obra y cuánto por material para que los costos totales sean de \$500,000?

Solución:

(6.6)

> El costo total es igual al costo fijo más el costo variable,
>
> $CT = CF + CV$
>
> donde el costo variable depende del número de artículos que se produzcan (mano de obra, materia prima), mientras que los costos fijos permanecen constantes, independientes de las unidades producidas (arriendo, salario básico, etc.).

Por lo anterior $CT = 140{,}000 + C(x) = 500{,}000$, donde $C(x)$: costo variable.

$C(x) =$ costo mano de obra $+$ costo de materia prima

$$C(x) = x + \frac{1}{2}x$$

luego

$$500{,}000 = 140{,}000 + \left(x + \frac{1}{2}x\right)$$

$$500{,}000 = 140{,}000 + \frac{3}{2}x$$

$$360{,}000 = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{360{,}000\ (2)}{3} = x$$

$$240{,}000 = x \quad \text{costo mano de obra}$$

$$120{,}000 = \frac{x}{2} \quad \text{costo materia prima}$$

Caso 3: **Donde una cantidad es igual a una cantidad dada más o menos algo.** El procedimiento a seguir en este caso es llamar x la cantidad dada y a la otra $x \pm k$.

Ejemplo 10

Un fabricante produce semanalmente 150 artículos que vende al doble del costo menos \$100 pesos. ¿Cuánto es el costo de producir cada artículo, si sus utilidades son de \$36,000?

Se define la utilidad, como la diferencia entre los ingresos totales recibidos R, y los costos totales causados C. $U(x) = R(x) - C(x)$	(6.7)

En este caso, sea x el costo de producir un artículo, luego $(2x - 100)$ es lo que se recibe por cada artículo vendido.

Por (6.6)

$$U(x) = 150\,(2x - 100) - 150x$$

$$= 300x - 15{,}000 - 150x$$

$$36{,}000 = 150x - 15{,}000$$

$$x = \frac{36{,}000 + 15{,}000}{150}$$

$$x = \$340 \quad \text{costo de producir un artículo}$$

A continuación ilustraremos problemas similares.

Ejemplo 11

Un fabricante produce lámparas, que vende a \$8,200. Sus costos de producción son los siguientes: \$130,000 en arriendo, y \$3,500 por el material y la mano de obra de cada lámpara producida. ¿Cuántas lámparas debe producir para obtener utilidades de \$246,000?

Solución: Por (6.6)

$$U(x) = R(x) - C(x)$$

Por (6.5) $CT = CF + CV$

Para el caso $CT = 130{,}000 + 3{,}500x$

$$R(x) = 8{,}200x$$

Remplazando

$$U(x) = 8{,}200\,x - [130{,}000 + 3{,}500x]$$

$$U(x) = 8{,}200x - 130{,}000 - 3{,}500x$$

$$246{,}000 + 130{,}000 = 4{,}700x$$

$x = 80$; luego debe producir 80 lámparas.

Ejemplo 12

Mensualmente una compañía puede vender x unidades de cierto artículo a p pesos cada uno, en donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación de demanda: $P = 1{,}400 - 40x$.

La ecuación de la demanda de un cierto artículo es una ecuación de la forma $ap + bx = c$, a,b,c, ctes. que relaciona el número de artículos vendidos x, y el precio p a que éstos se venden.	(6.8)

a) ¿Cuántos artículos debe vender para obtener unos ingresos de \$12,000 pesos?

b) ¿Cuál debe ser el precio de cada artículo para obtener ingresos de \$10,000?

Solución:

a) Por (6.5)

$$R = xp$$

remplazando p, se obtiene $R = x(1{,}400 - 40x)$,

luego, $12{,}000 = x(1{,}400 - 40x)$

$$12{,}000 = 1{,}400x - 40x^2$$

ordenando la ecuación,

$$40x^2 - 1{,}400x + 12{,}000 = 0$$

simplificando,

$$x^2 - 35x + 300 = 0$$

resolviendo por factorización,

$$(x - 15)(x - 20) = 0$$

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = 20$$

Esto significa que vendiendo 15 ó 20 artículos obtiene los mismos \$12,000 de ingresos.

b) $R = xp$

Ya que en este caso lo que nos preguntan es el precio, debemos escribir la ecuación de demanda en términos de p, y luego remplazarla en la ecuación de ingreso, así:

$$p = 1{,}400 - 40x$$

$$40x = 1{,}400 - p$$

$$x = \frac{1{,}400 - p}{40}$$

entonces,

$$R = xp$$

$$R = \left(\frac{1{,}400 - p}{40}\right)p$$

$$10{,}000 = \frac{1{,}400\,p}{40} - \frac{p^2}{40}$$

$$10{,}000 = 35p - \frac{p^2}{40}$$

$$\frac{p^2}{40} - 35p + 10{,}000 = 0$$

$$p^2 - 1{,}400p + 400{,}000 = 0$$

resolviendo,

$$p = 1{,}000 \text{ pesos}$$

$$p = 400 \text{ pesos}$$

Ejemplo 13

Un vendedor de hamburguesas está comprando la carne preparada por cada hamburguesa a \$120. Decide entonces preparar él mismo la carne, teniendo en cuenta que para cada hamburguesa necesita sólo \$60 de carne, pero para

su elaboración necesita alquilar un local por valor de \$15,000. ¿Cuántas hamburguesas necesitará preparar por su cuenta para que se justifique su decisión de elaborarlas él mismo?

Solución:

En este caso lo que se quiere es encontrar el número de artículos que se deben producir para equiparar los costos del primer concepto con los costos del segundo concepto,

$$120x = 15{,}000 + 60x$$

donde x: número de hamburguesas a producir.

$$120x - 60x = 15{,}000$$

$$60x = 15{,}000$$

$$x = 250$$

Observe que si se producen menos de 250 hamburguesas, por ejemplo 249, resulta más barato comprarlas a \$120 que producirlas.

$$249\,(120) = \$29{,}880$$

$$15{,}000 + 60\,(249) = \$29{,}940$$

Ejemplo 14

Un vendedor sabe por experiencia que si vende sus revistas a \$1,500 cada una, puede vender 800 revistas. Pero si aumenta el precio de cada revista en \$300 pesos deja de vender 50 revistas. ¿Cuántas revistas debe vender para obtener ingresos de \$1,200,000, pero vendiendo menos revistas?

Solución:

Si vendiera todas sus revistas obtendría unos ingresos de:

$$R = xp$$

$$R = (800)(1{,}500)$$

$$R = 1{,}200{,}000$$

Dado que quiere obtener los mismos ingresos vendiendo menos revistas, debemos hallar un valor k, tal que

$$R = \underbrace{(800 - 50k)}_{\text{(No. de revistas)}}\;\underbrace{(1{,}500 + 300k)}_{\text{(precio por cada revista)}} = 1{,}200{,}000$$

donde k representa la cantidad de aumento en el precio y disminución en el número de revistas vendidas.

Luego

$$1{,}200{,}000 = 1{,}200{,}000 + 240{,}000k - 75{,}000k - 15{,}000k^2$$

de donde

$$165{,}000k - 15{,}000k^2 = 0$$

luego

$k = 0$

$k = 11$

Observe que si $k = 0$, tenemos las condiciones iniciales.
El número de revistas que se deben vender es:

$800 - 50k$

$800 - 50(11)$

$800 - 550 = 250,$

que venderá a $1{,}500 + 300(11) = \$4{,}800$

Observe que:

$R = 250 \times 4{,}800 = 1{,}200{,}000$

6.7 Ecuaciones lineales con dos variables

La forma general de la ecuación lineal con dos variables es:

$y = ax + b \quad \text{o} \quad y - ax - b = 0$

Para simplificar, expresaremos cualquier ecuación de este tipo de la forma $P(x, y) = 0$.

Una solución de $P(x, y) = 0$ es el conjunto S formado por los pares ordenados (x, y) que verifican la ecuación. También aquí llamaremos a S el conjunto solución de $P(x, y) = 0$.

Ejemplo 15

Sea U el conjunto de todos los números reales: entonces, algunos de los elementos del conjunto solución de $y = 3x + 2$ son: $(-2, -4)$, $(-1, -1)$, $(0, 2)$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$. En realidad el conjunto solución S contiene infinito número de elementos.

El método para encontrar los elementos de tal conjunto solución es muy fácil. Para ello se escoge un valor cualquiera de x por ejemplo 0, y después se remplaza en la ecuación dada para calcular el correspondiente valor de y, así:

$y = 3(0) + 2$

$y = 0 + 2$

$y = 2$

De manera similar podríamos comprobar que, efectivamente, $(-2, -4)$, $(-1, -1)$, etc. son elementos del conjunto solución. Como habíamos dicho, el conjunto solución de esta ecuación es un *conjunto infinito*, por tanto no podemos enumerar todos sus elementos y para describirlos necesitaremos utilizar otro método, el *método gráfico*. Este método requiere que restrinjamos el conjunto solución al conjunto de los números reales. En adelante supondremos que se ha hecho así.

La gráfica de una ecuación $P(x, y) = 0$ (en los reales) es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas constituyen pares ordenados que son elementos del conjunto solución de $P(x, y) = 0$.

El procedimiento corriente para dibujar la gráfica de una ecuación de este tipo consiste en determinar unos cuantos puntos de ella, y después unir estos puntos mediante una recta.

Ejemplo 16

Dibujar la gráfica de: $y = 3x + 2$

Preparemos la siguiente tabla de pares (*véase* Ejemplo 1).

x	-2	-2	0	1
y	-4	-1	2	5

Después trazamos la gráfica de la figura.

Observaciones

1. La gráfica de la figura es una recta, por consiguiente bastará calcular solamente dos puntos para determinar esta gráfica.
2. En la mayoría de los casos, los puntos más fáciles de identificar son aquellos que se encuentran haciendo una variable igual a 0, y resolviendo para el valor de la otra variable. O sea, se hace $x = 0$ y se encuentra el valor correspondiente a y; después se hace $y = 0$ y se obtiene el valor correspondiente para x. En otras palabras, se obtienen los dos puntos de corte con el eje Y y con el eje X.

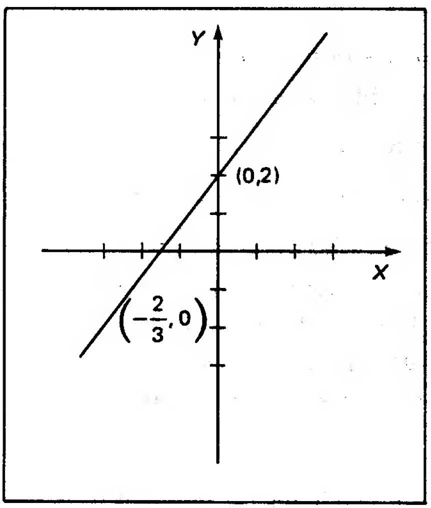


Figura 6.1 $y = 3x + 2$.

Ejemplo 17

Haga la gráfica de la ecuación $2x - 5y = 0$

Esta ecuación es un ejemplo del caso en donde no se encuentran dos puntos haciendo cada variable igual a 0, pues si $x = 0$

$2(0) - 5y = 0 \Rightarrow y = 0$

si $y = 0$

$4x - 7(0) = 0 \Rightarrow x = 0$

Ambos casos dan lugar al mismo punto (0, 0). Por tanto, se debe averiguar otro valor para una de las variables.

Si $x = 3 \quad 2(3) - 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{6}{5}$

Entonces dos parejas solución son (0, 0) y $(3, \frac{6}{5})$, con las cuales podremos realizar la gráfica.

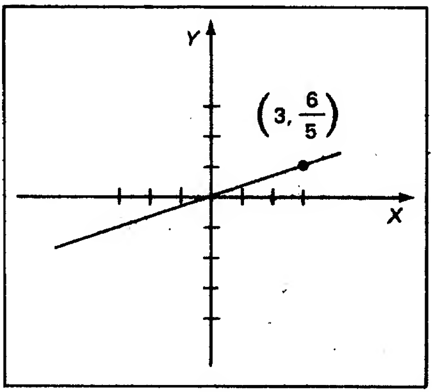


Figura 6.2 $2x - 5y = 0$.

Ejemplo 18 (Decisiones sobre producción)

Una fábrica produce salchichones de dos tipos: cervecero y corriente. Cada unidad de salchichón cervecero requiere $\frac{1}{4}$ de hora-máquina para su producción y cada unidad del corriente $\frac{1}{6}$ de hora-máquina. Si hay 320 horas-máquina semanales disponibles en la fábrica,

a) Encuentre la ecuación que relaciona el número de salchichones de cada tipo que se pueden producir en la fábrica.

b) Si se producen 480 unidades de salchichón cervecero, ¿cuántas unidades de salchichón corriente pueden producirse?

Solución

a) Sea x el número de unidades de salchichón cervecero a producir, y sea y el número de unidades de salchichón corriente, entonces

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y = 320$$

es la ecuación de producción.

b) Si $x = 480$, entonces

$$\frac{1}{4}(480)+\frac{1}{6}y = 320$$

$$120+\frac{y}{6} = 320$$

$$\frac{y}{6} = 200$$

$$y = 1{,}200$$

se producirán 1,200 unidades de salchichón corriente.

Ejemplo 19 (Manejo de inventarios de bodega)

Abastos "La económica" tiene 1,386 unidades de cierto artículo en bodega, del cual vende diariamente 42 unidades.

a) Encuentre una ecuación que relacione el número de artículos en bodega, en término del número de días de venta.

b) Si la política de la tienda es hacer un pedido en el momento en que tenga en depósito 336 artículos, ¿en cuántos días deberá hacer un nuevo pedido?

Solución

a) Sea x el número de días de venta, y sea y el número de artículos en bodega; entonces

$$y = 1{,}386 - 42x$$

b) Si $y = 336$,

$$336 = 1{,}786 = 42x$$

$$42x = 1{,}050$$

$$x = \frac{1{,}050}{42} = 25$$

Tendría que realizar el pedido al cabo de 25 días.

6.8 Ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas

La expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables, es:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{12}\,y &= b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y &= b_2 \end{aligned}} \qquad (6.9)$$

donde los coeficientes son números reales.

La solución de este sistema es un par ordenado (x, y) que verifica ambas ecuaciones. Puesto que la gráfica de cada una de las ecuaciones de 6.8 es una recta, en realidad estamos buscando los puntos que son comunes a ambas rectas.

Se dan a continuación varios métodos para resolver tales sistemas.

a) *Solución simultánea por suma o resta (eliminación).*

En este método multiplicamos adecuadamente una de las dos ecuaciones (o ambas) de tal forma que los coeficientes de una de las variables sean iguales pero de signo contrario, de modo que al sumar las dos ecuaciones se elimine dicha variable.

A continuación se resuelve la ecuación que queda. Para obtener el valor de la otra incógnita se remplaza el valor hallado en una de las dos ecuaciones originales.

Ejemplo 20

Resuelva

$$2x - 5y - 19 = 0$$
$$3x + 4y + 6 = 0$$

Para eliminar x, multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -2; así obtenemos:

$$6x - 15y - 57 = 0$$
$$-6x - 8y - 12 = 0$$

sumando, tenemos que

$$-23y - 69 = 0 \qquad\qquad y = -\frac{69}{23} = -3$$

Remplazando $y = -3$ en $2x - 5y - 19 = 0$

Obtenemos $\quad 2x = 19 + 5(-3)$

$$x = 2$$

luego la solución es el par $(2, -3)$

Gráficamente,

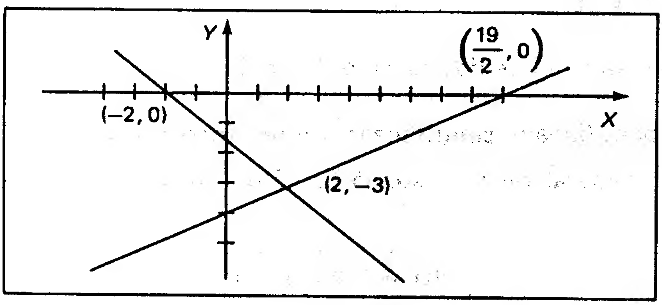


Figura 6.3 $\quad 2x - 5y - 19 = 0$
$3x + 4y + 6 = 0$

b) *Solución simultánea por sustitución*.

Se resuelve una de las ecuaciones para una de las variables en términos de la otra y se sustituye la variable por esta expresión en la otra ecuación. La ecuación obtenida por sustitución contiene una sola variable y por consiguiente podemos resolverla fácilmente.

Ejemplo 21

Resuelva

(1) $2x - 5y + 8 = 0$

(2) $x + 4y - 9 = 0$

Primero debemos resolver una de las ecuaciones ya sea para x o para y. Notamos que podemos evitar fracciones si despejamos x en la segunda ecuación y obtenemos

$x = 9 - 4y$

Ahora sustituimos x por esta expresión en la primera ecuación.

$2(9 - 4y) - 5y + 8 = 0$

Dado que ésta es una ecuación lineal con una variable, podemos resolverla para y

$18 - 8y - 5y + 8 = 0$

$-8y - 5y = -18 - 8$

$13y = 26$

$y = 2$

Este valor lo remplazamos preferiblemente en la ecuación $x = 9 - 4y$ y obtenemos el valor de x, así:

$x = 9 - 4y$

$x = 9 - 8$

$x = 1$

Por consiguiente, la pareja (1, 2) es la solución del sistema dado. O sea que el punto de corte o intersección de las dos rectas es el punto (1, 2); gráficamente,

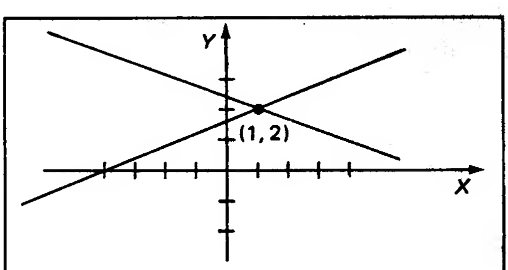


Figura 6.4 $2x - 5y + 8 = 0$
$x + 4y - 9 = 0$

c) *Solución simultánea por igualación.*

Como su nombre lo indica, este método consiste en despejar en ambas ecuaciones la misma variable, y luego igualarlas para obtener una ecuación con una sola variable.

Ejemplo 22

Resuelva

(1) $x + 3y = 4$

(2) $3x - 5y + 2 = 0$

Despejando en ambas ecuaciones la variable y, se obtiene:

(1) $y = \dfrac{4 - x}{3}$

(2) $y = \dfrac{3x + 2}{5}$

De donde:

$$\frac{4 - x}{3} = \frac{3x + 2}{5}$$

Resolviendo la ecuación de una variable se obtiene:

$20 - 5x = 9x + 6$

$14x = 14$

$x = 1$

Ahora remplazamos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2)

$y = \dfrac{4 - 1}{3} \quad y = 1$

Solución: $(1, 1)$.

Observe que independientemente del método que se use, el objetivo de todos los métodos es obtener una ecuación de *una* variable cuya solución es muy sencilla.

Los siguientes ejemplos ilustran dos casos especiales: un sistema sin solución y un sistema con infinitas soluciones.

Ejemplo 23

Resuelva

$3x + 2y + 5 = 0$

$6x + 4y - 4 = 0$

Eliminando, obtenemos:

$14 = 0$

Puesto que la única ecuación es, de hecho, una contradicción, no hay solución. Esto significa que las rectas son paralelas.

Gráficamente,

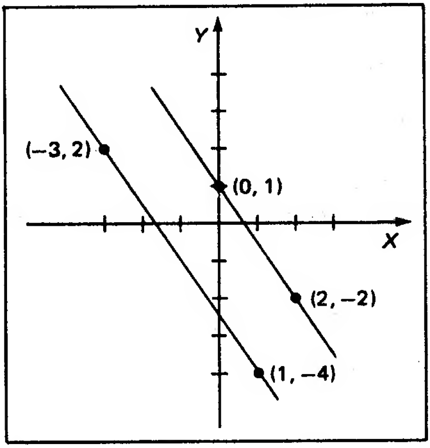


Figura 6.5 $3x + 2y + 5 = 0$
$6x + 4y - 4 = 0.$

Ejemplo 24

Resuelva

$$4x - y + 3 = 0$$
$$8x - 2y + 6 = 0$$

Eliminado x, obtenemos $0 = 0$

Esto significa que las dos ecuaciones iniciales son iguales, por tanto al representarlas gráficamente las rectas coinciden, lo cual implica (*véase* 6.8) que el sistema tiene infinitas soluciones.

Gráficamente,

Recta única

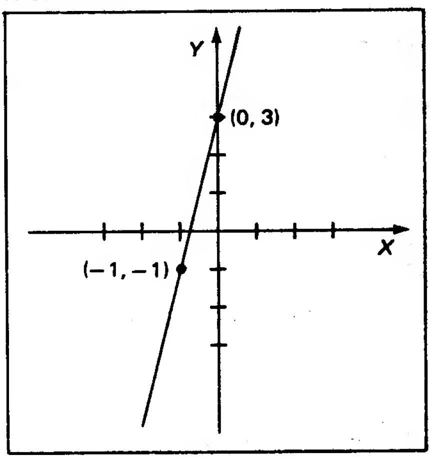


Figura 6.6 $4x - y + 3 = 0$
$8x - 2y + 6 = 0.$

6.9 Ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas

La expresión general de tales sistemas es:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

La metodología de la sección anterior se puede aplicar sin cambios sustanciales a este sistema. El procedimiento a seguir es transformar el sistema inicial en un sistema de dos ecuaciones por dos incógnitas y seguidamente transformar este último en una ecuación lineal con una única variable.

Ejemplo 25

Resuelva

(1) $2x - y + 3z + 9 = 0$

(2) $x + 3y - z - 10 = 0$

(3) $3x + y - z - 8 = 0$

En primer lugar eliminamos x entre la primera ecuación y la segunda y, en segundo lugar, entre la primera y la tercera. Las ecuaciones resultantes son:

$$7y - 5z - 29 = 0$$
$$5y - 11z - 43 = 0$$

A continuación eliminamos y, entre la primera ecuación y la segunda del nuevo sistema, obteniendo:

$$z + 3 = 0$$

De esta última ecuación resulta $z = -3$. Haciendo $z = -3$ en la segunda ecuación podemos encontrar que $y = 2$; ahora, con $y = 2$ y $z = -3$ la primera ecuación nos da $x = 1$.

Luego la solución es $(1, 2, -3)$.

Ejemplo 26

Resuelva

(1) $x + 2y - z + 3 = 0$

(2) $2x + y + z - 1 = 0$

(3) $3x + 3y + 2 = 0$

La primera eliminación (de x) produce el sistema

$$3y - 3z + 7 = 0$$
$$3y - 3z + 7 = 0$$

Es decir, el sistema obtenido es realmente una única ecuación: $3y - 3z + 7 = 0$ que como dijimos anteriormente tiene infinitas soluciones. En este

caso, si queremos encontrar una, asignamos un valor cualquiera a una de las variables de la ecuación anterior, y obtenemos el valor de las otras así:

Sea $y = 1$, entonces $3(1) + 7 = 3z$

luego $z = \dfrac{10}{3}$

remplazando en (1)

$$x + 2(1) - \left(\frac{10}{3}\right) = -3$$

$$x = -3 + \frac{10}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

Ejemplo 27

Resuelva

$$x + y + z - 1 = 0$$

$$2x - 3y - 2z + 4 = 0$$

$$3x - 2y - z + 2 = 0$$

La primera eliminación (de x) nos lleva al sistema

$$5y + 4z - 6 = 0$$

$$5y + 4z - 5 = 0$$

Eliminando y obtenemos $-1 = 0$
luego el sistema no tiene solución.

Si x es el número de ejemplares ofrecidos o demandados de un cierto artículo a un precio p, entonces las siguientes ecuaciones representan respectivamente la oferta y la demanda del artículo al precio p.

$$x = a - bp \quad \text{(demanda)} \qquad (6.10)$$

$$x = c + dp \quad \text{(oferta)} \qquad (6.11)$$

En la ecuación (6.10) es claro que a medida que aumenta el precio, baja el número de artículos que se demandan del mismo, mientras que en la ecuación (6.11) ocurre lo contrario; a medida que el precio aumenta, el número de artículos que se ofrecen en el mercado también aumenta.

Económicamente, la oferta y la demanda tienen sentido para valores no negativos de x y p (*véase* Figura 6.7).

El punto de corte de las ecuaciones de oferta y demanda recibe el nombre de *punto de equilibrio del mercado* (*véase* Figura 6.7), y representa el punto en que el número de unidades que se ofrecen es igual al número de unidades que se demandan.

Ejemplo 28

Dadas las ecuaciones de oferta y demanda de un producto, determine el precio y la cantidad de equilibrio de dicho artículo.

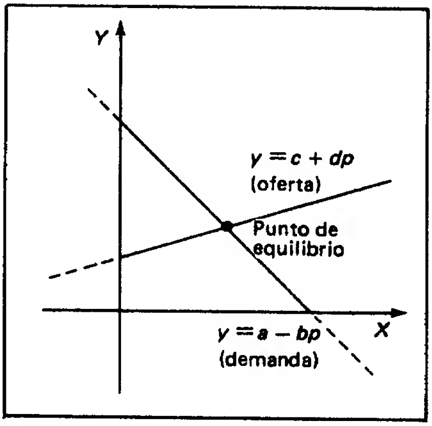


Figura 6.7 Oferta — Demanda.

demanda $p = 28 - x$ (1)

oferta $p = 2x + 1$ (2)

Solución

En este caso el método más fácil de aplicar es el de igualación. Entonces tenemos,

$$28 - x = 2x + 1$$

$$-x - 2x = -27$$

$$x = 9$$

luego, $y = 28 - 9 = 19$

Esto significa que el precio de equilibrio es 19 y el número de artículos es 9.

En la siguiente gráfica se ilustran las curvas de oferta y demanda y el correspondiente punto de equilibrio.

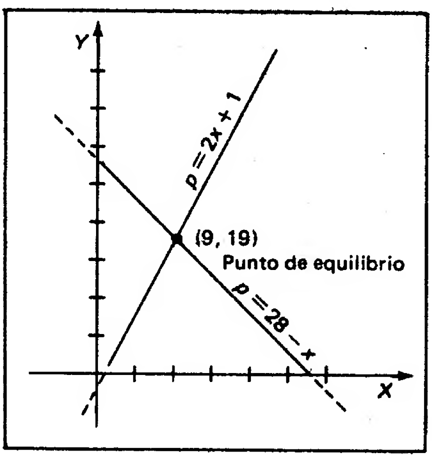


Figura 6.8 $p = 2x + 1$
$p = 28 - x$

6.10 Resumen

Recuerde que:

1. $ax + b = 0$ es la forma estándar de una ecuación lineal o de primer grado.
2. $ax^2 + bx + c = 0$, es la forma estándar de una ecuación de segundo grado, y cuya solución por medio de la fórmula es:

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$

3. c pesos colocados al $r\%$ producen un interés I.

   $$I = \frac{cr}{100}$$

4. El ingreso R obtenido al vender x artículos a p pesos es: $R = x \cdot p$
5. Costo total = costos fijos + costos variables.
6. Utilidad = ingresos — costos totales.
7. Se define punto de equilibrio del mercado como aquél en el que la oferta es igual a la demanda.

6.11 Ejercicios y problemas

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales

   a) $15x - 8 = 3x + 2 - (x + 5)$

   b) $-\{2x + 7 - [-1 + 3x - (-4x + 9) - (3x + 4)] - 29\} = -3$

   c) $\dfrac{x-3}{3} + \dfrac{4x-1}{4} = \dfrac{x+9}{2}$

   d) $\dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{x}{4}$

   e) $(x-2)(x+3) = (x+5)^2$

   f) $(x-1)^3 - (x+2)^3 = -6x(2x-5) + 3x^2$

   g) $2x - \dfrac{5x-6}{2} = \dfrac{1}{2}(x-5) - 5x$

   h) $\dfrac{2x+7}{5x+2} = \dfrac{2x+3}{5x-1}$

   i) $\dfrac{(3x-2)(4x+1)}{6x(x+3)} - 2 = 0$

   j) $\dfrac{(2x+5)}{(3x-1)} - \dfrac{(3x+2)}{(5x+2)} = \dfrac{1}{15}$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $6x^2 - 5x - 21 = 0$

c) $4x^2 - 10x = -7$

d) $x^2 = 8x$

e) $x^2 + 5 = 0$

f) $(x + 5)^2 + 3x = (x + 3)(2x - 1)$

g) $\dfrac{3x+5}{x-1} + \dfrac{x+3}{x+2} = 3$

h) $(x - 3)^3 = x^3 + 5$

i) $\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{3x-5}{x^2+5} = 0$

j) $\dfrac{-2x}{x+2} + \dfrac{1+2x}{x} = \dfrac{4}{x+2}$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{x+6} + x - 6 = 0$

b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 0$

c) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} + 1 = 0$

d) $\sqrt{x-2} - x + 4 = 0$

e) $\sqrt{x-10} + \sqrt{x+11} = 0$

f) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} - 4 = 0$

g) $-\sqrt{2x+9} + \sqrt{3x+16} = 1$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x+12}} = 0$

i) $\sqrt{3x+16} - \sqrt{2x+9} = -1$

j) $\dfrac{x}{\sqrt{2x+3}} - \dfrac{2x}{3\sqrt{x+1}} = 0$

4. Resuelva algebraicamente el par de ecuaciones dadas. Después, trace la gráfica de las dos rectas y verifique gráficamente la solución.

a) $\begin{cases} 5x + 2y - 4 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 4x - y + 7 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + y - 19 = 0 \\ -2x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ -x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

5. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -x^2 + x + 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 - 4x - 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 5x = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - 25 = 0 \\ x = y \end{cases}$

6. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 2 = 0 \\ x + 3y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 14 = 0 \\ -3x + y - z + 10 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2z + 5 = 0 \\ 2y - 3z - 12 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - y + 3z - 3 = 0 \\ -2x + y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + 4z - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 4 = 0 \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z - 5 = 0 \\ -6x + 4y - 8z + 10 = 0 \\ 9x - 6y + 12z - 15 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 4y - 8y + 4z - 12 = 0 \\ -2x + 4y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + y - 5z + 4 = 0 \\ -x - y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 4 \\ y^2 + xz = 7 \end{cases}$

j) $\begin{cases} xy = -12 \\ yz = -4 \\ xz = 3 \end{cases}$

7. Resuelva los siguientes problemas

a) El producto de dos números positivos es 54. Si un número es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

b) Un granjero desea cercar un terreno rectangular con 260m. de alambre. El área del terreno es de 8,400 m^2. Si a lo largo de uno de los lados del terreno existe ya una cerca de piedra donde no se requiere utilizar alambre, ¿cuáles serán las dimensiones?

c) En las elecciones para alcalde de Utopía, el candidato A recibió 5,919 votos más que el candiato B. El total de la votación fue 18,635. ¿Cuántos electores votaron por el ganador?

d) Cuando dos obreros trabajan separadamente, el primero produce 4 unidades/min. más que el segundo. Cuando trabajan juntos producen 15 unidades/min., pero el rendimiento de cada uno es solamente las tres cuartas partes del que tienen cuando trabajan por separado. ¿Cuántas unidades produce cada uno cuando trabaja sin compañía?

e) El precio de cuatro manzanas y dos peras es \$810. El de una manzana y tres peras \$315. Encontrar el precio de una manzana y una pera.

f) El jabón Nordit fue promocionado en la ciudad A mediante 4 páginas completas en un periódico, y en la televisión, mediante 15 avisos. En la ciudad B, que tiene el mismo número de habitantes que A, se utilizaron como propaganda 5 páginas completas en los periódicos y 10 avisos en la televisión. Como resultado se vendieron 6,250 jabones en la ciudad A y 6,500 en la ciudad B. ¿Cuántas ventas deben atribuirse a la publicidad en los periódicos y cuántas a la publicidad de la televisión, suponiendo que actúan separadamente?

g) En el país llamado Suburbia, el precio de un paquete de cigarrillos incluye un impuesto de \$25 pesos, y este impuesto es el mismo para todas las marcas de cigarrillos. En Suburbia, 5 paquetes de cigarrillos Notar cuestan lo mismo que 4 paquetes de cigarrillos Coffin. En el

puerto libre de Utopía no existen impuestos y, por tanto, cada paquete de cigarrillos cuesta $25 pesos menos que en Suburbia. En Utopía, 5 paquetes de cigarrillos Notar cuestan lo mismo que 3 paquetes de cigarrillos Coffin. Encuentre los precios de los cigarrillos en Suburbia.

h) Los automóviles Nerverstart consumen gasolina corriente cuyo precio es de $30 pesos el galón, y su rendimiento es de 20 kilómetros por galón. Los automóviles Everknock consumen gasolina superior de 340 pesos el galón, y su rendimiento es de 17 kilómetros por galón. Un día, la suma de las distancias recorridas por un Neverstart y un Everknock fue de 91 kilómetros, y el costo total de la gasolina consumida por los dos automóviles fue de $1,620. ¿Cuánto recorrió cada uno?

i) Una persona invierte $5,000,000 en dos negocios diferentes. Uno de los negocios le produce el 3% y el otro solamente el 1%. a) ¿Qué cantidad debe invertir en cada negocio para obtener beneficios totales de $135,800? b) Si decide invertir el triple de lo que invierte en el negocio que le produce el 1%, que le produce el 3%, ¿cuáles son los beneficios obtenidos ahora?

j) En una fábrica se producen dos artículos diferentes que se venden a $3,200 y $4,500, respectivamente. Si se venden 400 artículos de las dos clases y los ingresos obtenidos son de $1,579,200, ¿cuántos artículos se vendieron de cada uno?

k) Un fabricante de muebles produce mensualmente 80 escritorios que vende al doble de lo que le cuesta producirlos cada año. Si tiene unos costos fijos de $1,400,000 mensuales, ¿cuál es el costo de producir cada escritorio, si sus utilidades son de $3,800,000 mensuales?

l) Semanalmente una fábrica produce x unidades de cierto artículo que vende a p pesos cada uno y cuya ecuación de demanda viene dada por $1{,}500x + 3p = 3{,}861{,}000$. a) ¿Cuántos artículos debe vender para obtener ingresos de 1,087,000? b) En este caso ¿a qué precio se vendió cada artículo?

m) Una industria que ensambla electrodomésticos está comprando empaques para cada artículo, a $3,000. Decide alquilar una máquina para fabricar él mismo los empaques, por lo cual paga $1,200,000 mensuales incluida la materia prima. ¿Cuántos empaques necesita fabricar para que se justifique su decisión?

n) Una agencia inmobiliaria puede vender un edificio de 40 apartamentos a $14,000,000 cada uno. Su propietario asume que por cada $400,000 que le aumente a cada apartamento dejará de vender uno. ¿Cuántos apartamentos debe vender y a qué precio, para realizar una venta total de $560,000,000, sin vender todos los apartamentos?

o) Grafique las siguientes ecuaciones:

a) $x/2 + y = 5$

b) $4y - x - 3 = 0$

c) $y = 7x - \frac{1}{2}$

p) Una cervecería elabora dos tipos de cerveza: clásica y tipo exportación. Cada caja de tipo clásico necesita $\frac{1}{15}$ de hora-máquina para ser envasada, mientras que la de tipo exportación necesita $\frac{1}{10}$ de hora-máquina. Si la fábrica trabaja las 24 horas del día.

a) Encuentre la ecuación que relaciona el número de cajas que se envasan de cada tipo.

b) Si se envasan 120 cajas de cerveza tipo exportación, ¿cuántas se envasan del tipo clásico?

q) Dada la ecuación de oferta y demanda respectivamente, halle el punto de equilibrio.

a) $p = 3x + 10; p = 130 - x$

b) $5p - 3x = 910; 3p + 2x = 660$

c) $\frac{2}{3p} = 10x - 400 = 0; p + \frac{3}{4x} - 1{,}230 = 0$

Referencias

Kramer, Arthur. *Fundamentos de matemáticas.* McGraw-Hill.

Keedy/Bittinger. *Algebra y trigonometría.* Fondo Educativo Interamericano.

Aria, Jagdish. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Prentice Hall.

Budnick, Frank. *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill.

Hoffmann L. D. *Cálculo para ciencias sociales.* McGraw-Hill.

CAPITULO 7

Polinomios y funciones polinomiales

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Graficar ecuaciones polinomiales (rectas y parábolas).
2. Encontrar la ecuación de una recta.
3. Utilizar el teorema del factor y el teorema del residuo para resolver ecuaciones y factorizar funciones polinomiales.
4. Realizar divisiones utilizando la división sintética.
5. Calcular raíces racionales por medio de la división sintética.

7.1 Introducción

Aunque en los capítulos precedentes hemos estudiado muchas formas de solucionar ecuaciones, en ningún caso hemos tratado ecuaciones de grado mayor que dos. Existen fórmulas (muy complicadas por cierto) para la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado pero, como dijimos anteriormente, está demostrado que no es factible encontrar una fórmula para obtener las raíces de una ecuación de grado mayor que cuatro. En este capítulo desarrollaremos métodos que nos permitirán, en algunos casos, resolver ecuaciones de grado mayor que dos.

Además se hará también un estudio más formal del concepto de polinomio. En todos los casos, salvo en los que se diga lo contrario, se presupone que estamos trabajando en el campo de los números reales.

7.2 Polinomios

Un polinomio es una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, en donde $a_0, a_1, \ldots a_n$, y n es un entero no negativo.

De acuerdo a la definición, son polinomios:

$P_1(x) = 6x^2 + 7x - 2$

$P_2(x) = 2x + 3$

$P_3(x) = 6$

$P_4(x) = 6x + 3x^3$

Un polinomio como $P_3(x) = 6$ se denomina *polinomio constante.*

Por el contrario, las expresiones:

$3x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 6$

$-6x^{-2} + 4x + 8$

no son polinomios, ya que en la primera expresión el exponente $\left(\frac{1}{2}\right)$ no pertenece a los enteros, y en la segunda expresión el exponente -2 es negativo.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, si $p(x) = 0$, entonces obtenemos una ecuación polinómica,

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$

Según lo anterior,

$3x + 2 = 0$

$5x^2 - 7x + 4 = 0$

$6x^4 - 3x^3 + x = 0$

son ecuaciones polinómicas.

7.3 **Polinomios lineales** (La recta)

Una expresión de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x$ es un polinomio de primer grado. Gráficamente, todo polinomio de primer grado representa una recta en el plano cartesiano. Usualmente la expresión anterior se representa por: $y = m\ x + b$ y aparece dibujada en la Figura 7.1 en donde el número b representa el corte con el eje Y (intersecto con y) y el número m se denomina pendiente de la recta.

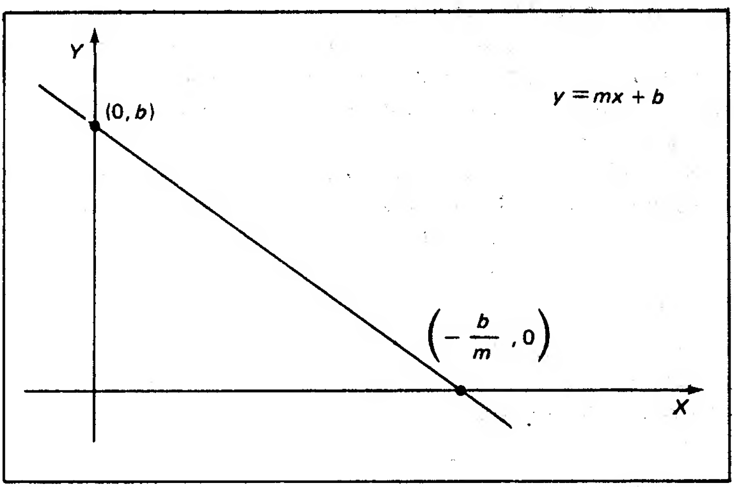


Figura 7.1 La recta.

Observe que la recta corta al eje X en el punto $-\dfrac{b}{m}$, y también que $x = -\dfrac{b}{m}$ es la solución de la ecuación $mx + b = 0$

> La raíz de la ecuación polinomial $mx + b = 0$ representa el corte de la recta con el eje X.

La pendiente de una recta indica el grado de "inclinación" de la recta, y formalmente se define así:

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

luego, la pendiente es la razón que existe en la recta entre Y y X. (*Véase* Figura 7.2).

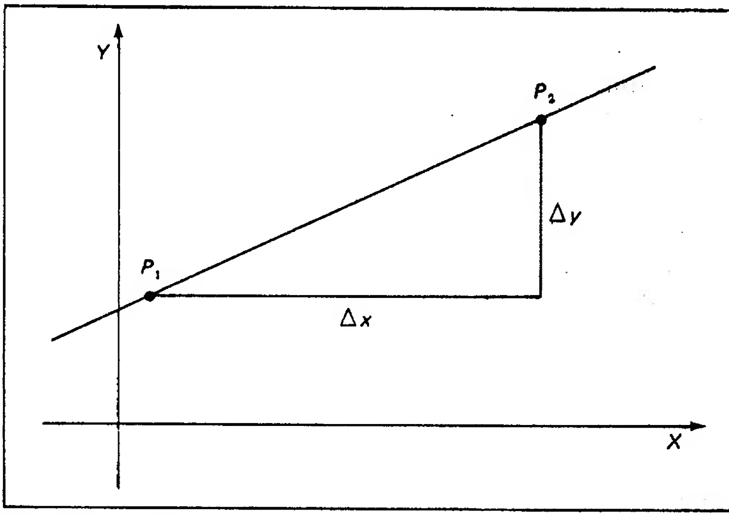


Figura 7.2 Pendiente de la recta $y = mx + b$.

Es importante aclarar que el valor de la pendiente no depende de los puntos que se consideren para su cálculo.

Si P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2),

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{7.1}$$

Ejemplos: Calcule la pendiente de la recta que pasa por (2, 2) y (3, 6)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{3 - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

Luego la pendiente es $m = 4$

En este caso, P_1 (2, 2) y P_2 (3, 6)

Si hubiéramos considerado P_1 (3, 6), P_2 (2, 2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Observe que el orden en que se formen los valores de P_1 y P_2, no afecta el valor de la pendiente.

Formas de la ecuación de una recta

a) Ecuación punto-pendiente

La ecuación

$$\boxed{y = y_0 + m\,(x - x_0)} \qquad (7.2)$$

en donde (x_0, y_0) es un punto por donde pasa la recta y m es la pendiente, nos permite encontrar fácil y rápidamente la ecuación de una recta. La ecuación anterior se denomina forma punto-pendiente.

Ejemplo 1

Calcule la ecuación de la recta que pasa por (12, 6) y tiene pendiente 3.

En este caso, $m = 3$, $x_0 = 12$, $y_0 = 6$
entonces, $y = 6 + 3\,(x - 12)$

$$y = 6 + 3x - 36$$

$$y = 3x - 30$$

Ejemplo 2

Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos (—3, 4) y $(7, \frac{1}{2})$.

Observe que aunque no nos dan la pendiente, podemos calcularla y luego usar la ecuación punto-pendiente para determinar la ecuación de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{por (7.1)}$$

$$m = \frac{4 - \frac{1}{2}}{-3 - 7} = \frac{\frac{7}{2}}{-10}$$

$$m = -\frac{7}{20}$$

1. Ahora utilizando el punto (—3, 4) como el punto $P(x_0, y_0)$ entonces,

$$y = y_0 + m\,(x - x_0) \qquad \text{por (7.2)}$$

$$y = 4 - \frac{7}{20} \quad (x + 3)$$

$$y = 4 - \frac{7}{20} x - \frac{21}{20}$$

$$y = - \frac{7}{20} x + \frac{59}{20}$$

b) **Ecuación pendiente-intersección**

Esta intersección es con el eje Y.

En el ejemplo anterior $y = 3x - 30$, la pendiente es $m = 3$ y la intersección con el eje Y es $b = -30$.

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$ y su corte con el eje Y es 6.

$$\boxed{y = m\,x + b} \qquad (7.3)$$

entonces:

$$y = -\frac{1}{3}X + 6$$

Ejemplos de aplicación

1. **Un vendedor de perros calientes sabe que si vende cada uno a \$150 vendería 180 perros, mientras que si los vende a \$200 vendería tan sólo 130 perros. Asumiendo que la ecuación de la demanda es lineal:**
   a) **Determine la ecuación de la demanda.**
   b) **Calcule el ingreso al vender 150 perros.**

Solución

a) Consideremos cada punto de la recta de la forma (x, p)

luego P_1 (180, 150) y P_2 (130, 200), entonces

$$m = \frac{200 - 150}{130 - 180} = \frac{50}{-50} = -1$$

y

$$p = 150 - 1\,(x - 180)$$

$$p = 150 - x + 180$$

$$p = -x + 330$$

b) Como $R = xp$ entonces:

$$R = x(-x + 330)$$
$$R = 150\,(-150 + 330)$$
$$R = 150\,(180)$$
$$R = 27{,}000 \text{ pesos}$$

2. Si diariamente el precio del dólar con respecto al peso aumenta \$0.38 pesos, y hoy se cotiza a \$360 pesos
   a) Encuentre la ecuación que relaciona el precio del dólar con respecto al tiempo, suponiendo que este cambio es lineal.
   b) ¿Cuál será el precio del dólar en 10 días?

Solución:

Consideramos cada punto de la recta de la forma (x, y), donde x representa el tiempo en días y y el precio del dólar.

a) En este caso, 0.38 representa la variación del dólar con respecto al tiempo, esto es, la pendiente; luego $m = 0.38$

Suponemos que el día de hoy es el día cero, luego conoceríamos el punto $P(0.360)$; por tanto,

$$y = 360 + 0.38\,(x - 0)$$
$$y = 360 + 0.38x$$

b) En 10 días el precio del dólar será

$$y = 360 + 0.38(10)$$
$$y = 360 + 3.80$$
$$y = 363.80$$

7.4 Polinomios cuadráticos

Un polinomio cuadrático es una expresión de la forma

$$p(x) = y = ax^2 + bx + c \;, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Gráficamente, un polinomio cuadrático representa una parábola.

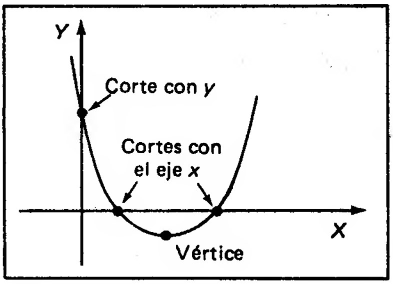


Figura 7.3 La parábola.

Una parábola queda determinada gráficamente cuando conocemos los siguientes datos:

a) Hacia dónde abre

b) Cortes con los ejes

c) Ubicación del vértice

a) Para determinar hacia dónde abre la parábola basta observar el signo del coeficiente de x^2. Si es positivo la parábola abre hacia arriba, si es negativo abre hacia abajo; (*véase* Figura 7.4).

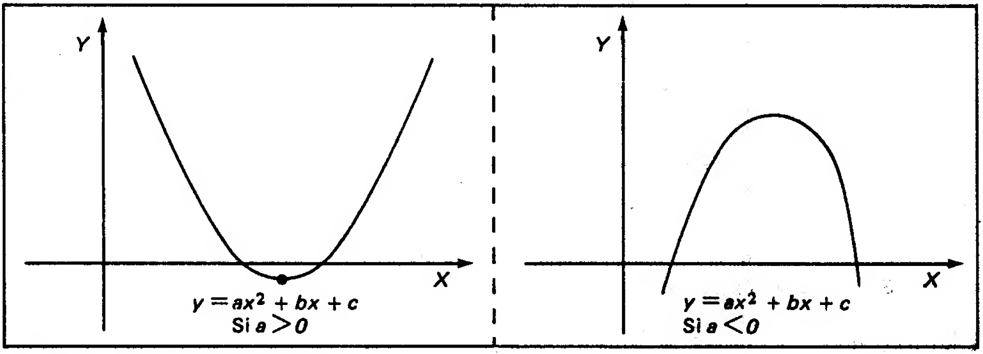


Figura 7.4 Gráfica de una parábola.

b) Para determinar si la parábola corta el eje X debemos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si la ecuación tiene solución, la parábola corta al eje X justamente en los puntos x que solucionan la ecuación. Si la ecuación no tiene solución, significa que la parábola no corta al eje X; (*véase* Figura 7.5).

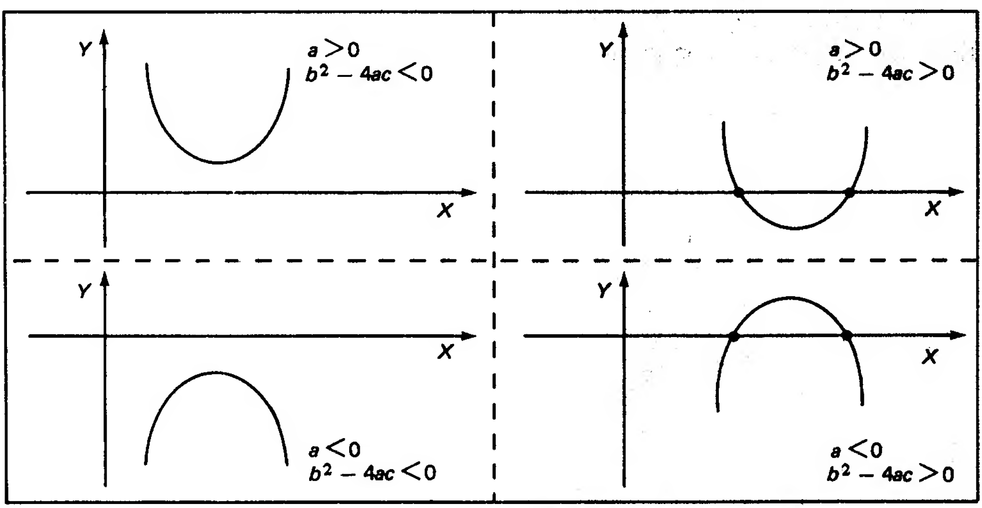


Figura 7.5 Situación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ para $a \lesseqgtr 0$ y $b^2 - 4ac \lesseqgtr 0$.

La parábola siempre cortará al eje Y; para determinar el corte hacemos $x = 0$ en $P(x)$.

c) El vértice corresponde al valor máximo o mínimo de la parábola y se encuentra ubicado en el punto cuya abscisa es $x = -\frac{b}{2a}$. El valor correspondiente a y se encuentra remplazando este valor de x en $p(x)$; (*véase* Figura 7.6).

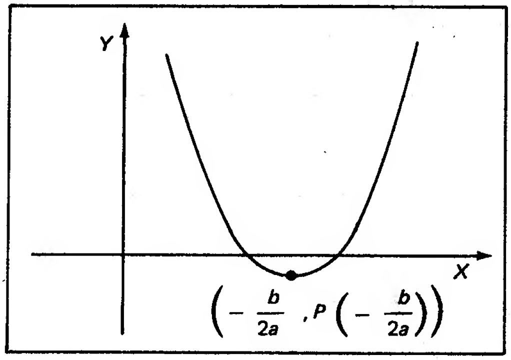


Figura 7.6 Vértice de una parábola.

Ejemplo 4

Grafique la ecuación polinómica de segundo grado $y = x^2 - 4x - 5$.

Como $1 > 0$ entonces la parábola abre hacia arriba.

Dado que $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) = 0$,

entonces $x = 5$, $x = -1$ son los cortes de las parábolas con el eje X.

La abscisa del vértice es: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2} = 2$, y por tanto la ordenada es $y = (2)^2 - 4(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$

El corte con el eje Y se encuentra haciendo $x = 0$; en este caso $y = -5$. Entonces la gráfica de la parábola es:

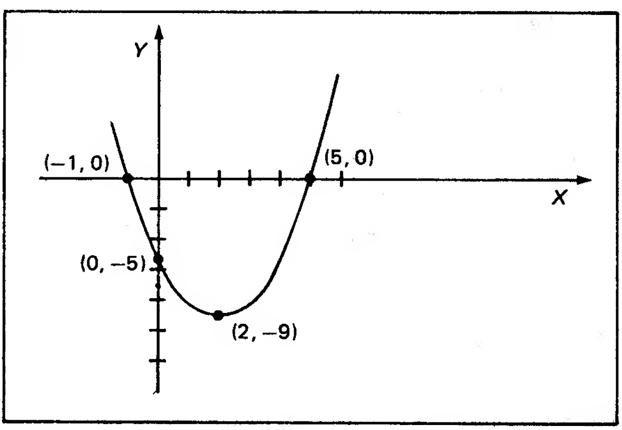


Figura 7.7 $y = x^2 - 4x - 5$

7.5 Teoremas sobre ecuaciones polinómicas

En el Capítulo 7, al resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ dijimos que ésta no tenía solución; efectivamente, la ecuación sí tiene solución pero ésta no pertenece a los números reales.

Observe que $x = \sqrt{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$, es solución de $p(x) = x^2 + x + 1 = 0$, ya que

$$\left(\sqrt{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\right) + 1 =$$

$$-\frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$-\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Realmente todas las ecuaciones tienen solución, sólo que en algunos casos ésta no es real. El siguiente teorema garantiza este hecho.

El teorema fundamental del álgebra: Si $p(x)$ es un polinomio, entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz, bien sea real o compleja[18]	(7.4)

El teorema anterior nos habla de la existencia de las raíces de una ecuación polinómica, pero no nos dice la forma de hallar dichas raíces. Los siguientes teoremas muestran algunos procedimientos que nos permiten calcular (cuando sea posible) las raíces de una ecuación polinómica $p(x) = 0$

Teorema: Algoritmo de la división. Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, y $s(x)$ es un polinomio de grado m, $m \leqslant n$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$.	(7.5)

Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, el cociente y el residuo respectivamente de dividir $P(x)$ entre $S(x)$ se pueden obtener realizando simplemente el cociente. El grado de $Q(x)$ es $n - m$.

[18] Omitimos la demostración de este teorema, por ser de alta dificultad.

Ejemplo 5

Calcule $Q(x)$ y $R(x)$ si

$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 27x + 16$ y $S(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +12x^2 & -27x & +16 & x-2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3 + x^2 + 14x + 1 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & +12x^2 & -27x & +16 & \\
 & -x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 14x^2 & -27x & +16 & \\
 & & -14x^2 & +28x & & \\ \cline{3-5}
 & & & x & +16 & \\
 & & & -x & +2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 18 &
\end{array}
$$

En este caso:

$$Q(x) = 2x^3 + x^2 + 14x + 1$$
$$R(x) = 18$$

Observe que el grado de $Q(x)$ $(=3)$ es el grado de $P(x)$ $(=4)$ — grado de $S(x)$ $(=1)$.

Un caso especial del teorema anterior se da cuando $R(x) = 0$; en este caso $P(x) = S(x)\ Q(x)$, donde decimos que $P(x)$ está factorizando, $S(x)$ y $Q(x)$ son los factores de $P(x)$.

Ejemplo 6

Sea $P(x) = 12x^3 + 33x^2 - 2x + 21$ y $S(x) = x + 3$, entonces

$$
\begin{array}{rrrr|l}
12x^3 & +33x^2 & -2x & +21 & x+3 \\ \cline{5-5}
-12x^3 & -36x^2 & & & 12x^2 - 3x + 7 \\ \cline{1-4}
0 & -3x^2 & -2x & +21 & \\
 & +3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 7x & +21 & \\
 & & -7x & -21 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Luego $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$

$12x^3 + 33x^2 - 2x + 21 = (12x^2 - 3x + 7)(x + 3)$

Por lo que $(12x^2 - 3x + 7)$ y $(x + 3)$ son factores de $12x^3 + 33x^2 - 2x + 21$.

Podemos concluir que si $R(x) = 0$, entonces $P(x)$ se puede factorizar como $S(x) \cdot Q(x)$ o, lo que es lo mismo, la división de $P(x)$ entre $S(x)$ es exacta. Es por tanto útil conocer el residuo de la división de $P(x)$ entre $S(x)$. El si-

guiente teorema brinda una manera rápida de conocer el residuo de $P(x)$ entre $S(x)$ para cuando $S(x) = x - a$.

Teorema del residuo: Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces el residuo $R(x)$ al dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es $R(x) = P(a)$.	(7.6)

Ejemplo 7

Calcule el residuo al dividir $P\ x) = 3x^2 + 5x - 28$ entre $S(x) = x - 3$

$R(x) = P(3) = 3(3)^2 + 5(3) - 28 = 14,$

luego el residuo es $R(x) = 14$

Ejemplo 8

Factorice $P(x) = 3x^3 - x^2 + 20x + 288$ de la forma $P(x) = (x + 4) \cdot Q(x)$

Solución

Como $P(-4) = 3(-4)^3 - (-4)^2 + 20(-4) + 288$

$= 0$

entonces la división es exacta.

Veamos:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 - x^2 + 20x + 288 & x + 4 \\
\cline{3-3}
 & -3x^3 - 12x^2 & 3x^2 - 13x + 72 \\
\cline{1-2}
 & -13x^2 + 20x + 288 & \\
 & 13x^2 + 52x & \\
\cline{2-2}
 & 72x + 288 & \\
 & -72x - 288 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

luego

$$3x^3 - x^2 + 20x + 288 = (x + 4)(3x^2 - 13x + 72).$$

El siguiente teorema nos permite encontrar raíces de ecuaciones polinómicas, si conocemos factores del polinomio, o factorizar si conocemos las raíces.

Teorema del factor

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, y si $x - a$ es un factor de $P(x)$, entonces a, es una raíz de $P(x)$. Además, si a es una raíz de $P(x)$, $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.	(7.7)

Ejemplo 9

Como $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, entonces $x=3$ y $x=2$ son raíces del polinomio $P(x)=x^2-5x+6$.

Ejemplo 10

Factorice $P(x)$ si $x=2$, $x=5$ y $x=-3$ son las raíces de $P(x)=0$

Por el teorema del factor, luego

$P(x)=(x-2)(x-5)(x+3)$

Ejemplo 11

Halle las raíces de $P(x)=0$, si

$P(x)=x(2x-5)(3-5x)$

Para poder utilizar el teorema cada factor debe expresarse de la forma $x-a$, por lo que

$$x=x-0$$

$$2x-5=2\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$3-5x=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)$$

luego $P(x)=-10(x-0)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$

Por tanto, las raíces de $P(x)$ son $x=0$, $x=\frac{5}{2}$, $x=\frac{3}{5}$.

7.6 División sintética

La división sintética es un procedimiento que simplifica la división de un polinomio $P(x)$ entre una expresión de la forma $S(x)=x-a$. Igual que en el proceso corriente de la división, con la división sintética es posible obtener el cociente y el residuo, de tal forma que:

$$P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

El procedimiento es similar al de la división corriente con la diferencia de que se trabaja únicamente con los coeficientes, lo cual facilita el proceso. Los siguientes ejemplos muestran los pasos a seguir:

Ejemplo 12

Divida $P(x)=x^5-8x^4+14x^3+6x^2-7x-11$ entre $S(x)=x-3$

El procedimiento a seguir es:

1. Ordenar el polinomio $P(x)$ en forma decreciente teniendo en cuenta los exponentes.
2. Colocar únicamente los coeficientes con sus respectivos signos en el dividendo y el valor de a en el divisor, según la siguiente disposición:

Renglón 1	1	−8	14	+6	−7	−11	3
Renglón 2	↓						
Relgón 3	1						

3. El primer coeficiente del *renglón 1* (1 en este caso), es siempre el primer número del *renglón 3*.
4. El primer número del *renglón 3* se multiplica por el divisor y el producto se coloca en el *renglón 2*, debajo del segundo coeficiente con el cual se suma algebraicamente obteniéndose así el segundo número del tercer renglón.
5. Este proceso se repite hasta obtener el último número del tercer renglón, así:

Renglón 1	1	−8	14	+6	−7	−11	3
Renglón 2	↓	3	−15	−3	9	6	
Renglón 3	1	−5	−1	3	+2	− 5	

El último número del *renglón 3* en este caso −5, es el residuo de la división.

Los otros números del *renglón 3* corresponden a los coeficientes del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado de $P(x)$,
Por tanto

$$Q(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 2$$

y $$R(x) = -5$$

Ejemplo 13

Divida $P(x) = 2x^6 + 6x^5 - 3x^3 + 12x^2 - 7x + 8$ entre $S(x) = x + 2$
En este caso:

2	6	0	−3	12	−7	8	−2

El cero del *renglón 1*, es el coeficiente del término x^4 que no está explícito en $P(x)$;
como $x + 2 = x - (-2)$, $-2 = a$

2	6	0	−3	12	−7	8	−2
↓	−4	−4	8	−10	−4	−22	
2	2	−4	5	2	11	−14	

luego $Q(x) = 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x + 11$

y el residuo $R(x) = -14$

7.7 Raíces racionales

Sea $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)(x + 1)$. (Por el *teorema del factor* $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{5}$, $x = -1$ son las raíces de $P(x)$.

Solucionando el producto:

$$P(x) = x^3 - \frac{7}{10x^2} - \frac{7}{5x} + \frac{3}{10}$$

Observe que el término $\frac{3}{10}$, es el producto de $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1$.

Ahora escribimos $P(x)$ con coeficientes enteros, (en este caso multiplicando por 10).

$$P(x) = \frac{1}{10}(10x^3 - 7x^2 - 14x + 3)$$

Los números $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{5}$ y -1, se pueden obtener como cocientes de los factores de a_0 entre los factores de a_n, así:

Factores de a_0 $= \{\pm 1 ; \pm 3\}$

Factores de a_n $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$-1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{1}{5}$$

Tenga en cuenta que a_0 es el término independiente y a_n es el coeficiente del término con el mayor exponente.

Las raíces de $P(x)$ pueden obtenerse de esta manera.

Lo anterior puede generalizarse mediante el siguiente teorema:

> *Teorema*
>
> Si $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ es un polinomio con coeficientes enteros, y si p/q es una raíz racional de $P(x) = 0$, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

(7.8)

El teorema anterior no garantiza la existencia de raíces racionales. De hecho, no todos los polinomios tienen raíces racionales, por ejemplo, la raíz de $x^2 + 3x + 1 = 0$, es

$\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, que corresponde a un número irracional.

Por otra parte, las raíces de $20x^2 + 7x - 6 = 0$ son $\dfrac{2}{5}$ y $-\dfrac{3}{4}$, que satisfacen las condiciones del teorema; esto es, 3 y 2 son factores de 6, y 5 y 4 son factores de 20.

En los ejemplos aplicaremos el teorema para obtener las raíces racionales de un polinomio siempre y cuando éstas existan.

> *Corolario*
>
> Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ y $a_n = 1$, entonces las raíces racionales de $P(x) = 0$ son enteros y dichas raíces son factores de a_0.

Ejemplo 14

Encuentre las raíces de $P(x) = 2x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 15x - 9$.

Hallando respectivamente los factores de 9 y 2,

Factores de 9 $= \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

Factores de 2 $= \{\pm 1, \pm 2\}$, entonces las posibles raíces son:

$$\left\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}\right\}$$

Utilizaremos la división sintética para verificar cuáles de las anteriores son raíces de $P(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 11 & 11 & -15 & -9 & \;1 \\ & 2 & 13 & 24 & 9 & \\ \hline 2 & 13 & 24 & 9 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces

$P(x) = (x - 1)(2x^3 + 13x^2 + 24x + 9)$

y $x = 1$ es una de las raíces de $P(x)$.

Es claro que un factor de $Q(x)$ es también un factor de $P(x)$, por tanto una raíz de $Q(x)$ es también una raíz de $P(x)$. Utilizaremos entonces $Q(x)$ para obtener otras raíces de $P(x)$.

Como $Q(x) = 2x^3 + 13x^2 + 24x + 9$ tiene todos los coeficientes positivos, ningún número positivo puede hacer $Q(x) = 0$; ésto es $Q(x)$ no tiene raíces positivas.

Continuando con el procedimiento tenemos ahora

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & 13 & 24 & 9 & \underline{-1} \\
 & -2 & -11 & -13 & \\
\hline
2 & 11 & 13 & -4 &
\end{array}$$

Como el residuo es $-4 \neq 0$, -1 no es raíz. Examinando un nuevo valor, tenemos,

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & 13 & 24 & 9 & \underline{-3} \\
 & -6 & -21 & -9 & \\
\hline
2 & 7 & 3 & 0 &
\end{array}$$

Como el residuo es cero, entonces $P(x) = (x - 1)(x + 3)(2x^2 + 7x + 3)$; por tanto, $x = -3$ es también una raíz. Aunque podemos utilizar nuevamente la división sintética con el polinomio $2x^2 + 7x + 3$, por ser este cuadrático, usaremos la fórmula para encontrar las raíces, dado que éste es un proceso más rápido y sencillo.

Luego

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(2)(3)}}{4}$$

$$x = \frac{-7\sqrt{\pm 5}}{4}$$

$$x = -3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Con este último cálculo hemos encontrado todas las raíces de $P(x)$ que son:

$$x = 1$$

$$x = -3$$

$$x = -3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Como $x = -3$ aparece dos veces, se llama raíz de multiplicidad 2.

Por lo anterior, debemos utilizar como regla continuar el procedimiento de división sintética con una misma raíz, hasta que el residuo sea diferente de cero.

Ejemplo 15

Halle las raíces de $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ como $a_n = 1$, por el corolario las raíces de $P(x)$ deben ser enteros y además factores de 8. Por tanto las posibles raíces son ± 1, ± 2, ± 4 y ± 8.

Utilizando el procedimiento de división sintética con $x = 2$ tenemos:

1	−1	−6	4	+	8	2
	2	2	−8	−	8	
1	1	−4	−4		0	

Luego $x = 2$ es una raíz y $P(x) = (x - 2)\ (x^3 + x^2 - 4x - 4)$. Continuando con el procedimiento, y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, utilizaremos nuevamente a 2 como una posible raíz.

1	1	−4	−4	2
	2	6	4	
1	3	2	0	

Por lo que $x = 2$ es nuevamente una raíz. Como el polinomio $Q(x) = x^2 + 3x + 2$ es cuadrático, utilizaremos la factorización para encontrar las otras raíces, así:

$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)\ (x + 2)$ por lo que las raíces de $P(x)$ son:

$x = 2$ de multiplicidad 2

$x = -1$

$x = -2$

7.8 Resumen

Recuerde que:

1. Un polinomio es una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, en donde $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$
2. La pendiente m de una recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3. Las formas de la ecuación de una recta son:

$y = y_0 + m\,(x - x_0)$	Punto-pendiente
$Y = mx + b$	Pendiente-intersección

4. $y = ax^2 + bx + c$, es la ecuación de una parábola, con vértice en $x = -\dfrac{b}{2a}$

y cortes en x, $x = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, y en y, $y = c$.

5. Si $P(x)$ es un polinomio, al dividirlo entre otro polinomio $S(x)$, obtenemos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, tal que:

$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$, en donde $Q(x)$: cociente y $R(x)$: residuo

6. Teorema del residuo.

   Si $S(x) = x - a$, $P(a)$ es el residuo al dividir $P(x)$ entre $S(x)$.

7. Teorema del factor.

   Si $P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$ entonces $x = a$ es raíz de $P(x) = 0$

8. Si $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ tiene raíces racionales $\frac{p}{q}$ entonces P es factor de a_0 y q es factor de a_n.

7.9 Ejercicios y problemas

1. Trace la recta que pasa por el siguiente par de puntos y determine sus pendientes:

   a) $(-3, -4)$ y $(1, 4)$

   b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{2}{3}, 6\right)$

   c) $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

   d) $(0, 5)$ y $\left(-\frac{3}{5}, 1\right)$

2. Determine la ecuación de la recta, dadas las siguientes condiciones:

   a) Pasa por $\left(\frac{1}{4}, -3\right)$ y $m = -2$

   b) Pasa por $(-2, 4)$ y $m = -\frac{2}{5}$

   c) Pasa por $(0, 3)$ y $m = \frac{3}{4}$

   d) Pasa por el origen y $m = \frac{1}{6}$

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

   a) $y = x + \frac{1}{3}$

   b) $y = -2x + 5$

   c) $3x + 3y = 4$

   d) $\frac{x + y}{6} = -3$

e) $2x - 5y = \frac{1}{2}$

f) $y = 5$

4. Para las rectas que satisfacen las condiciones dadas, encuentre el corte con los ejes:

a) Pasa por $(3, 4)$ y $\left(-3, \frac{1}{5}\right)$

b) Pasa por $\left(-6, -\frac{3}{2}\right)$ y $m = -\frac{3}{7}$

c) Pasa por $(3, 1)$ y $m = 0$

d) Pasa por $(9, -5)$ y tiene la misma pendiente de la recta $3x + y = 1$

5. Resolver los siguientes problemas:

a) Una fábrica de relojes produce 150 unidades a un costo total de \$750,000 y 250 a un costo total de \$1,125,000; suponiendo que la ecuación de costo es lineal, encuentre cuánto vale producir 200 relojes.

b) A un precio de \$17,500 kilo, la demanda de cierto artículo es de 450 kilos, mientras que a un precio de \$15,000 la demanda es de 500 kilos. Suponiendo que la demanda es lineal, *1)* encuentre la ecuación de la demanda, *2)* el número de kilos demandados a un precio de \$19,000.

c) Debido a un aumento en el costo de la materia prima, una fábrica se vio precisada a aumentar el precio de sus artículos de \$2,250 a \$2,500, lo que hizo disminuir las ventas de 400 a 280 artículos. Suponiendo que la demanda es lineal, ¿cuántos artículos venderá si decide fijar un nuevo precio de \$3,000?

d) Un fabricante puede ofrecer 200 vestidos al mes a un precio de \$35,000 cada uno y a este precio son demandados 250 vestidos. A \$40,000 cada vestido puede ofrecer 50 vestidos más, pero su demanda se reduce en 15 vestidos. *1)* Encuentre las ecuaciones para la oferta y la demanda suponiendo que éstas son lineales, *2)* ¿en qué punto la oferta y la demanda son iguales? *3)* si el gobierno grava cada vestido con un impuesto de \$2,500, ¿cuál es ahora el nuevo punto de equilibrio?

6. Grafique las siguientes funciones calculando para ello puntos de corte con ejes, vértice y hacia dónde abre la función.

a) $y = -x^2$

b) $y = x^2 + 5$

c) $2y - x^2 + 3 = 0$

d) $(x-3y)^2+6xy+5y=9y^2-1$

e) $y=-\dfrac{x^2}{2}+1$

7. Para cada uno de los siguientes polinomios $P(x)$ y $S(x)$, encuentre $Q(x)$ y $R(x)$ tal que $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$

a) $P(x)=2x^4-x^3+4x^2+6$
$S(x)=3x^2+1$

b) $P(x)=4x^4+5x^3+1$
$S(x)=\dfrac{1}{2}x-3$

c) $P(x)=9x^6+3x^3+2x^2-3$
$S(x)=2x^4-5$

8. Utilizando el teorema del residuo calcule $R(x)$ al dividir $P(x)$ entre $S(x)$

a) $P(x)=4x^4+3x^3+2x^2+x+8$
$S(x)=x-4$

b) $P(x)=3x^3-x+1$
$S(x)=x+1$

c) $P(x)=x^6-\dfrac{1}{2}x^5+1$
$S(x)=x+3$

9. Compruebe mediante la división sintética los residuos obtenidos en el anterior ejercicio.

10. Utilizando la división sintética y el teorema 7.5, encuentre la solución de los siguientes polinomios, cuando éstos tengan raíces enteras y/o racionales.

a) $4x^3-6x^2-10x-3=0$

b) $2x^3+3x^2-11x-6=0$

c) $2x^3+5x^2-x-1=0$

d) $2x^4+x^3+x^2+x-1=0$

e) $2x^3-3x^2-3x+2=0$

f) $x^3+x^2-8x+6=0$

Referencias

Swokowski, Earl. *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* Grupo Editorial Iberoamericano.
Larson - Hostetler. *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.
Washington. *Fundamentos de matemáticas con cálculo.* Fondo Educativo Interamericano.

Inecuaciones

OBJETIVOS

Al terminar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Resolver inecuaciones lineales.
2. Resolver inecuaciones de grado mayor o igual a dos.
3. Manejar correctamente intervalos de números reales.

8.1 Introducción

En los dos capítulos anteriores nos ocupamos de la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de diferente grado mediante diversos métodos. En este capítulo nos dedicaremos a las desigualdades y las inecuaciones, las propiedades de las desigualdades, los diversos métodos de solucionar y escribir las respuestas de las inecuaciones, y los intervalos de números reales; asimismo, se realizarán las demostraciones de una buena mayoría de las propiedades de las desigualdades.

El estudio de las desigualdades es importante, ya que temas de cálculo como el análisis de gráficas y otros de matemáticas como la programación lineal, necesitan el manejo claro y eficiente de las desigualdades e inecuaciones.

8.2 Propiedades fundamentales

Cuando estudiamos los números reales en el Capítulo 3, presentamos el subconjunto de los números reales positivos que cumple estas importantes propiedades:

R9 La suma de dos números reales positivos es un positivo.

R10 El producto de dos números reales positivos es un positivo.

R11 (Ley de la tricotomía). Para cualquier número real a, es verdadera una, y solamente una, de las siguientes proposiciones:

a) a es positivo

b) $-a$ es positivo

c) a es cero

La siguiente definición nos introducirá al concepto de desigualdad. Decimos que a es mayor que b, y escribiremos $a > b$, si $a - b$ es positivo; ésto es,

si $a - b > 0$. De manera similar, decimos que a es menor que b, y escribiremos $a < b$, si $a - b$ es negativo; ésto es, $a - b < 0$.

La expresión $a \geqslant b$ significa que $a > b$ o que $a = b$.

Utilizando la definición anterior podemos reescribir R11 así:

R11 Para cada par de números reales a y b es verdadera una, y solamente una, de las proposiciones:

$$a < b, a = b, a > b$$

A continuación enumeraremos algunas propiedades de las desigualdades, que aclararemos mediante ejemplos. Dichas propiedades se enunciarán sólo en términos de mayor que, pero es necesario aclarar que también se cumplen para el caso menor que.

1. Propiedad transitiva

Si a, b y c son números reales tales que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Demostración:

Si $a > b$ y $b > c$, entonces

$a - b > 0$ y $b - c > 0$, (por definición)

luego $(a - b) + (b - c) > 0$ (por R9)

entonces $a - c > 0$, luego

$a > c$ (por definición).

Ejemplos:

Como $15 > 6$ y $6 > 2$ entonces $15 > 2$

Como $8 < 10$ y $10 < 25$ entonces $8 < 25$

2. Propiedad de la adición

Si a, b y c son números reales, y si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Demostración:

Si $a > b$, entonces

$a - b > 0$ (definición), luego $a - b + (c - c) > 0$,

entonces $a + c - (b + c) > 0$, por lo que $a + c > b + c$.

Ejemplos:

Como $6 > 2$, entonces $6 + 3 > 2 + 3$

$$9 > 5$$

Como $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$, entonces $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} < \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} < \frac{7}{12}$$

3a. Producto por un número positivo

Si a, b y c son números reales tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$; ésto es, si una desigualdad se multiplica por un número positivo el sentido de la desigualdad se mantiene.

Demostración:

Si $a > b$, entonces $a - b > 0$ (por definición)

luego como $c > 0$, entonces $(a - b)\,c > 0$ (por R10)

luego $ac - bc > 0$ y $ac > bc$ (por definición)

3b Producto por un número negativo

Si a, b y c son números reales tales que $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$; ésto es, si una desigualdad se multiplica por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

La demostración es similar a la del caso anterior.

Ejemplos:

Como $18 > 10$, entonces

$18 \times 4 > 10 \times 4$

$72 > 40$

Como $-3 < 1$, entonces

$-3\,(-2) > 1\,(-2)$

$6 > -2$

4. Si a, b y c son números reales tales que

a) $a > b$ y $c > 0$, entonces

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Esto significa que si una desigualdad se divide por un número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

b) $a > b$ y $c < 0$, entonces

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

En general si una desigualdad se divide por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Ejemplos:

Como $6 > 4$ y $2 > 0$, entonces

$$\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$$

$$3 > 2$$

Como $-1 > -3$ y $-4 < 0$, entonces

$$+\frac{1}{4} < +\frac{3}{4}$$

5. Si a, b, c y d son números reales tales que $a > b$ y $c > d$, entonces, $a + c > b + d$.

Ejemplos:

Como $3 > 0$ y $5 > -1$, entonces

$$\begin{aligned} 3 + 5 &> 0 - 1 \\ 8 &> -1 \end{aligned}$$

Como $-4 < -2$ y $6 < 10$, entonces

$$\begin{aligned} -4 + 6 &< -2 + 10 \\ 2 &< 8 \end{aligned}$$

6. Si a y b son números reales, $a > b$ si, y solamente si, $-a < -b$.

Demostración:

$a > b$, si y solamente si, $a - b > 0$

si, y solamente si, $(a - b)(-1) < 0$

si, y solamente si, $-a + b < 0$

si, y solamente si, $-a < -b$

Ejemplos:

Como $5 > 3$, entonces $-5 < -3$

Observe que en el ejemplo anterior es como si hubiéramos multiplicado ambos lados de la desigualdad por -1 (*véase* Propiedad 3b).

7. Si a es un número real, $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

Ejemplo 1

Como $\sqrt{2} \neq 0$, entonces $(\sqrt{2})^2 > 0$

$$2 > 0$$

Como $-\dfrac{1}{2} \neq 0$, entonces $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$

$$\frac{1}{4} > 0$$

Observe que $0^2 = 0$

8. Si a es un número real, $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$.

Ejemplo 2

Como $4 > 0$, entonces $\dfrac{1}{4} > 0$; como $-\dfrac{1}{3} < 0$, entonces $-3 < 0$

9. Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b > 0$ si, y solamente si, ($a > 0$ y $b > 0$) o ($a < 0$ y $b < 0$).

Ejemplo 3

Como $3 > 0$ y $8 > 0$, entonces $3 \cdot 8 > 0$

Como $-9 < 0$ y $-10 < 0$, entonces $(-9)(-10) > 0$

10. Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b < 0$ si, y solamente si, ($a > 0$ y $b < 0$) o ($a < 0$ y $b > 0$).

Ejemplo 4

Como $7 > 0$ y $-12 < 0$, entonces $7(-12) < 0$

Como $-2 < 0$ y $15 > 0$, entonces $(-2)\,15 < 0$

11. Si a y b son números reales y $a \neq b$, entonces $a^2 + b^2 > 2\,ab$.

Demostración:

Como $a \neq b$, entonces $a - b \neq 0$; luego, por la Propiedad 7, $(a - b)^2 > 0$, por lo que $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ y $a^2 + b^2 > 2ab$.

El resultado neto de estos teoremas es que las desigualdades se comportan casi siempre como las igualdades. Podemos sumar los miembros correspondientes de dos desigualdades del mismo sentido y obtendremos una desigualdad verdadera. Podemos sumar (o restar) cantidades iguales a (o de) ambos miembros de una desigualdad. Podemos multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un número positivo. La única diferencia en el comportamiento de las desigualdades, con respecto a las igualdades, es que cuando se multiplican o dividen por un número negativo, tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

8.3 Intervalos de números reales

En muchas situaciones prácticas nos encontramos con desigualdades como las siguientes:

$$3x + 5 < x - 7 \quad \text{ó} \quad 2x^2 - 4x + 9 < 0$$

A estas desigualdades las llamamos inecuaciones. En estos casos queremos "resolver" las inecuaciones; es decir, queremos encontrar los valores de x que satisfagan las desigualdades. Dados los conjuntos $\{x/3x + 5 < x - 7\}$ y $\{x/2x^2 - 4x + 9 < 0\}$, queremos definirlos en una forma más sencilla de manera que, de una sola vez, se pueda saber cuáles son los elementos que forman cada conjunto. Estos conjuntos han de ser subconjuntos de los números reales y generalmente consistirán en intervalos o en uniones de intervalos.

Un intervalo es un conjunto de números reales. A continuación detallaremos los diferentes intervalos con los que se trabaja usualmente en matemáticas.

Intervalo abierto

Si a y b son dos números reales con $a \leq b$, entonces el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b representan el intervalo abierto de a a b que denotaremos por (a, b)[19], luego

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Gráficamente, al intervalo (a, b) lo representaremos así:

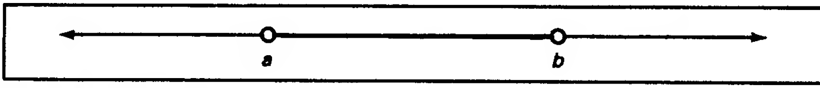


Figura 8.1 Intervalo abierto.

Intervalo cerrado

Si a y b son dos números reales, con $a \leq b$, definimos el intervalo cerrado de a a b como el conjunto de números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

El intervalo cerrado lo denotaremos así: $[a, b]$, por tanto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Gráficamente, $[a, b]$

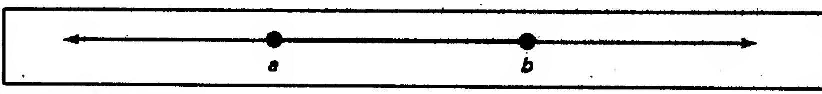


Figura 8.2 Intervalo cerrado.

Intervalo semiabierto

De manera similar, $[a, b)$ se define así:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Gráficamente, $[a, b)$

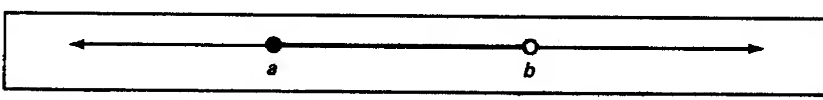


Figura 8.3 Intervalo abierto a la izquierda.

Igualmente, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Gráficamente,

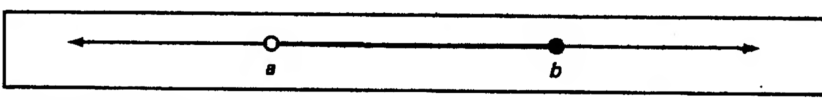


Figura 8.4 Intervalo abierto a la derecha.

[19] En algunos textos suele escribirse (a, b) como $]a, \quad b[$.

En todos los casos anteriores, los números reales a y b se denominan *extremos* del intervalo.

Intervalos infinitos

Utilizando la notación $\propto$ para representar infinito, entonces

$$(a, \propto) = \{x \in R \mid x > a\}$$

Gráficamente $(a, \propto)$[20]

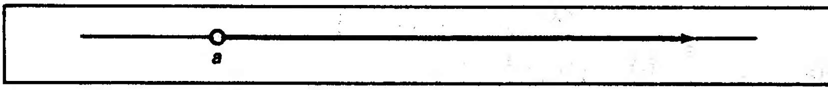


Figura 8.5 Intervalo infinito a la derecha, abierto en a.

$$[a, \propto) = \{x \in R \mid x \geqslant a\}$$

Gráficamente,

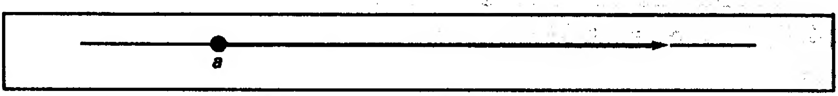


Figura 8.6 Intervalo infinito a la derecha, cerrado en a.

$$(-\propto, b) = \{x \in R \mid x < b\}$$

Gráficamente,

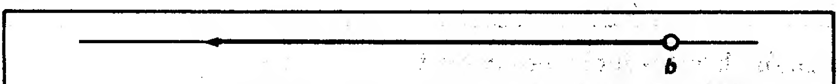


Figura 8.7 Intervalo infinito a la izquierda, abierto en b.

$$(-\propto, b] = \{x \in R \mid x \leqslant b\}$$

Gráficamente,

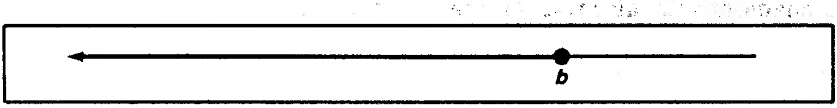


Figura 8.8 Intervalo infinito a la izquierda, cerrado en b.

Nota: $(-\propto, \propto) = R$ y $(a, a) = \phi$.

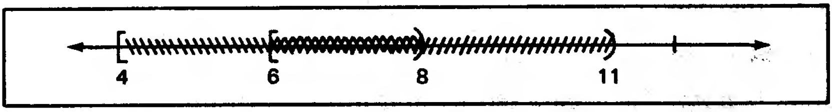
Como los intervalos son, como se dijo inicialmente, conjuntos de números reales, las operaciones de intervalos son operaciones de conjuntos: unión, intersección, complemento, etc.

Ejemplos:

a) Halle $[4, 8) \cap [6, 11)$.

[20] En ningún caso el extremo donde se coloca $\propto$ ó $-\propto$ se debe cerrar.

La solución puede obtenerse fácilmente en forma gráfica.

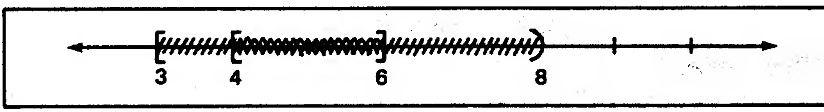


Se han representado sobre un mismo gráfico los dos intervalos con "trazos" diferentes. Es claro que la intersección es el intervalo conformado por líneas de ambos trazos, luego

$$[4, 8) \cap [6, 11) = [6, 8)$$

b) Halle $\quad [-\frac{1}{2}, 5) \cup \{[4, 6] \cap [3, 8)\}$

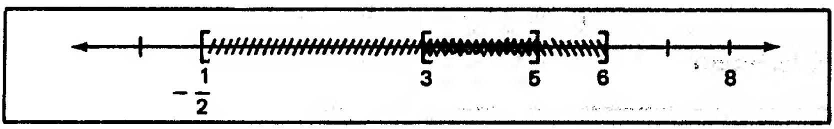
Resolveremos primero la operación indicada en las "llaves" $[4, 6] \cap [3, 8)$



luego $[4, 6] \cap [3, 8) = [3, 6]$

entonces

$[-\frac{1}{2}, 5] \cup [3, 6]$



La unión de estos intervalos corresponde toda a la región sombreada.

En las siguientes secciones realizaremos más ejemplos que nos permitirán manejar con facilidad los intervalos.

8.4 Inecuaciones lineales

Son inecuaciones lineales todas aquellas de la forma $\quad ax + b > cx + d$

$$ax \leqslant b$$

$$ax \geqslant bx + c,$$

y en general todas las desigualdades donde la variable es lineal.

Para resolverlas utilizamos las propiedades estudiadas anteriormente y procedemos como en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5

Resuelva $3x + 5 < x - 7$.

Sumando $-x$ en ambos miembros, obtenemos:

$3x + 5 + (-x) < x - 7 + (-x)$

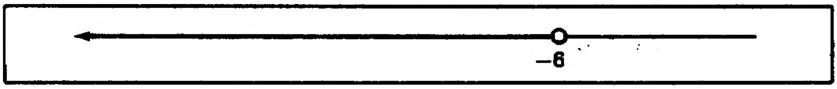
$2x + 5 < -7$, sumando ahora (-5) en ambos miembros, obtenemos $2x < -12$.

Por la Propiedad 8a, podemos dividir ambos miembros entre 2 y concluir que $x < -6$.

Como se procedió en el Capítulo 6, las propiedades de las desigualdades brindan la posibilidad de mecanizar el procedimiento de solución. En el ejemplo anterior podríamos proceder así:

$$3x + 5 < x - 7$$
$$3x - x + 5 < -7$$
$$2x + 5 < -7$$
$$2x < -5 - 7$$
$$2x < -12, \text{ (como } 2 > 0)$$
$$x < -\frac{12}{2},$$
$$x < -6$$

La solución en forma de intervalo será $(-\infty, -6)$. Gráficamente,



Ejemplo 6

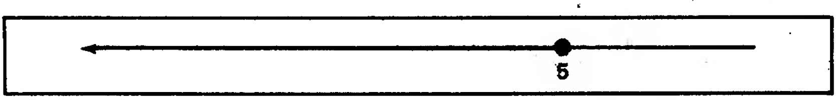
Resuelva $x + 8 \geqslant 5x - 12$

Procediendo como en el ejemplo anterior,

$$x - 5x \geqslant -12 - 8$$
$$-4x \geqslant -20, \text{ (como } -4 < 0, \text{ entonces}$$
$$x \leqslant \frac{-20}{-4} \quad \text{(cambia el sentido de la desigualdad)}$$
$$x \leqslant 5$$

La respuesta en forma de intervalo será $(-\infty, 5]$.

Gráficamente,



Ejemplo 7

Resuelva $\quad -6 < \dfrac{3x + 5}{2} \leqslant 4$

En este caso, la anterior desigualdad se puede representar por las siguientes desigualdades:

$$-6 < \frac{3x + 5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{3x + 5}{2} \leqslant 4, \text{ luego}$$
$$-12 < 3x + 5 \quad \text{y} \quad 3x + 5 \leqslant 8$$

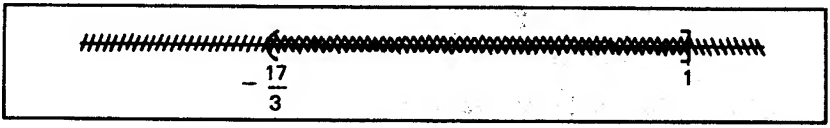
$$-12-5<3x \quad \text{y} \quad 3x \leqslant 8-5$$

$$-17<3x \quad \text{y} \quad 3x \leqslant 3$$

$$-\frac{17}{3}<x \quad \text{y} \quad x \leqslant 1$$

$$x>-\frac{17}{3} \quad \text{y} \quad x \leqslant 1$$

En forma de intervalo, la solución corresponderá a $\left(-\frac{17}{3}, \infty\right) \cap (-\infty, 1]$, luego



Por lo que la solución final será: $\left(-\frac{17}{3}, 1\right]$

Concluimos que el método para resolver inecuaciones es muy semejante al empleado para resolver ecuaciones. Mediante las operaciones justificadas en la sección sobre Propiedades Fundamentales de este capítulo, convertimos la inecuación dada en una serie de inecuaciones equivalentes hasta obtener la respuesta en la última.

Como una variación de este tipo de problema, consideremos las inecuaciones lineales que comprenden valores absolutos.

8.5 Inecuaciones con valor absoluto

Inecuaciones de la forma $|x|>a$

Consideremos el caso particular $|x|>1$. Esta desigualdad significa, geométricamente, que x está a más de una unidad del origen a la derecha o a la izquierda, como aparece en la Figura 8.9.

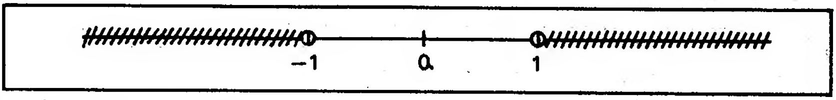


Figura 8.9 $|x|>1$.

Esto es, $|x|>1$ implica que $x>1$ o $x<-1$.

En general,

$$\boxed{|x|>a \quad \text{implica} \quad x>a \quad \text{ó} \quad x<-a} \tag{8.1}$$

Ejemplos:

Resuelva:

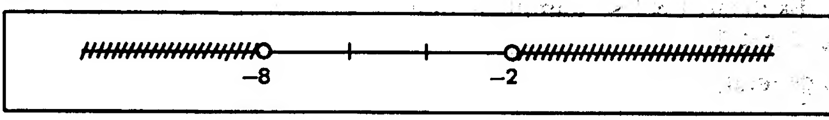
1. $|x+5|>3$ (por 8.1),

$|x+5|>3$ implica que $x+5>3$ ó $x+5<-3$

luego $x>-2$ ó $x<-8$.

Entonces, el conjunto solución es $(-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$.

Gráficamente,



2. $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$ (por 8.1)

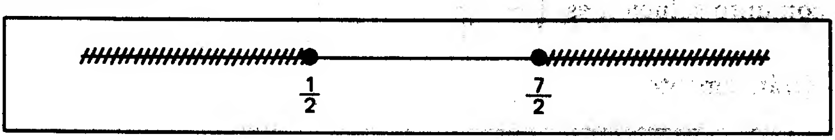
$\left|\dfrac{x-2}{3}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$ implica que $\dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{1}{2}$ ó $\dfrac{x-2}{3} \leqslant -\dfrac{1}{2}$

luego $2x-4 \geqslant 3$ ó $2x-4 \leqslant -3$

Así, $x \geqslant \dfrac{7}{2}$ ó $x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Entonces, el conjunto solución es $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, \infty)$.

Gráficamente,

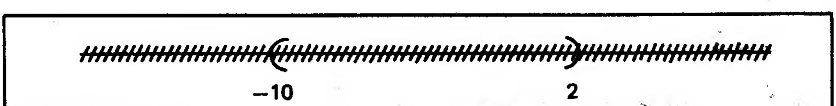


3. $|x+4|>-6$ (por 8.1)

$|x+4|>-6$ implica que $x+4>-6$ ó $x+4<6$

luego $x>-10$ ó $x<2$. El conjunto solución es $(-\infty, 2) \cup (-10, \infty) = \boldsymbol{R}$.

Gráficamente,



Observe que para el caso en que a sea un número negativo, la solución corresponde a todos los reales.

Inecuaciones de la forma $|x|<a$

Consideremos el caso particular $|x|<1$. En forma similar al caso anterior, esta desigualdad significa, geométricamente, que x está a menos de una uni-

dad del origen, bien sea a la derecha o a la izquierda, tal como aparece en la Figura 8.10.

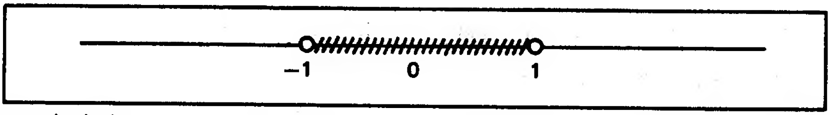


Figura 8.10 $|x| < 1$.

Es decir, $|x| < 1$ implica que $x > -1$ y $x < 1$ o lo que es lo mismo, $-1 < x < 1$.

En general,

$$\boxed{|x| < a \quad \text{implica que} \quad -a < x < a} \qquad (8.2)$$

Ejemplos

Resuelva

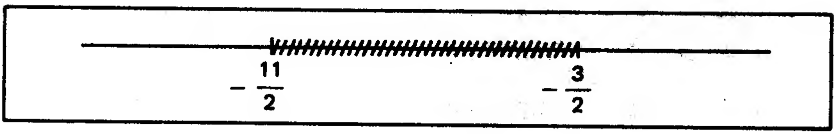
1. $|2x + 7| < 4$

Por 8.2, $|2x + 7| < 4$ implica que $-4 < 2x + 7 < 4$

luego $-11 < 2x < -3$; así, $-\dfrac{11}{2} < x < -\dfrac{3}{2}$.

El conjunto solución es $\left(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

Gráficamente,



2. $\left|\dfrac{x}{2} - 17\right| \leq 6$

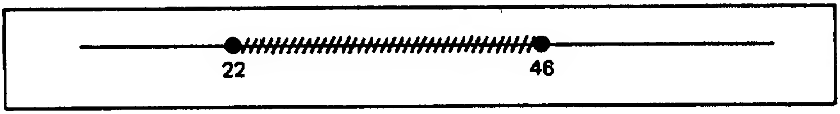
Por 8.2

$\left|\dfrac{x}{2} - 17\right| \leq 6$ implica que $-6 \leq \dfrac{x}{2} - 17 \leq 6$

luego $-6 + 17 \leq \dfrac{x}{2} \leq 6 + 17$; así,

$11 \leq \dfrac{x}{2} \leq 23$ de donde $22 \leq x \leq 46$. El intervalo solución es $[22, 46]$

Gráficamente,



Los siguientes ejemplos muestran algunas situaciones de mayor dificultad que pueden presentarse con inecuaciones.

Ejemplo 8

Resuelva

$||3-x|-12|<6$

entonces $\quad -6<|3-x|-12<6$, luego

$-6<|3-x|-12 \;\text{ y }\; |3-x|-12<6$

$6<|3-x| \text{ y } |3-x|<18$

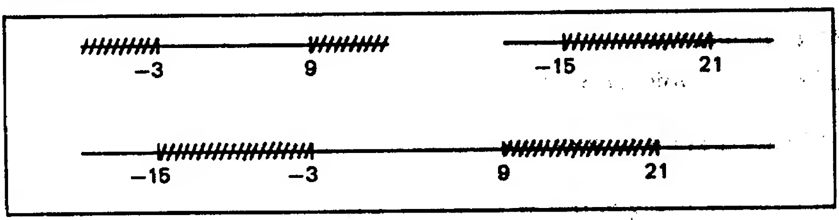
$(3-x>6 \text{ ó } 3-x<-6) \;\text{ y }\; -18<3-x<18$

$(-3>x \text{ ó } 9<x) \;\text{ y }\; -21<-x<15$

$(x<-3 \text{ ó } x>9) \;\text{ y }\; (x<21 \text{ y } x>-15$

$(x<-3 \text{ ó } x>9) \;\text{ y }\; (-15<x<21)$

Gráficamente,



Luego la solución es $(-15,-3) \cup (9,21)$

Ejemplo 9

Resuelva

$|x+1| \leqslant |x-3|$

sea $|x-3|=a$, luego

$|x+1| \leqslant a$, entonces

$-a \leqslant x+1 \leqslant a$, por lo que

$-|x-3| \leqslant x+1 \leqslant |x-3|$,

$-|x-3| \leqslant x+1 \;\text{ y }\; x+1 \leqslant |x-3|$

$|x-3| \geqslant -(x+1) \;\text{ y }\; |x-3| \geqslant x+1$

$$\begin{cases} x-3 \geqslant -(x+1) \\ \text{ó} \\ x-3 \leqslant (x+1) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x-3 \geqslant x+1 \\ \text{ó} \\ x-3 \leqslant -(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geqslant 2 \\ \\ -3 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -3 \geqslant 1 \\ \\ 2x \leqslant 2 \end{cases}$$

Observemos que $-3 \leqslant 1$ es una desigualdad verdadera, lo cual significa que esta situación se cumple para todos los reales $\mathbb{R}$, y que $-3 \geqslant 1$ es una desigualdad falsa, lo cual significa que no se cumple para ningún real; por eso la solución parcial es ϕ.

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ \text{ó} \\ \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \phi \\ \text{ó} \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{R} \cup x \geqslant 1 \quad \cap \quad \phi \cup x \leqslant 1$$

$$\mathbb{R} \quad \cap \quad x \leqslant 1$$

En forma de intervalo, $(-\propto, 1]$.

8.6 Inecuaciones de grado mayor o igual a dos

Consideremos la siguiente inecuación: $(x-2)(x+5) > 0$.

Para solucionarla existen varios métodos que explicaremos a continuación:

a) *Método analítico*

Utilizando la Propiedad 9, obtenemos:

$(x-2)(x+5) > 0$ si, y solamente si,

$$\begin{cases} x-2 > 0 \quad \text{y} \quad x+5 > 0 \\ \qquad\qquad \text{ó} \\ x-2 < 0 \quad \text{y} \quad x+5 < 0 \end{cases}$$

de donde:

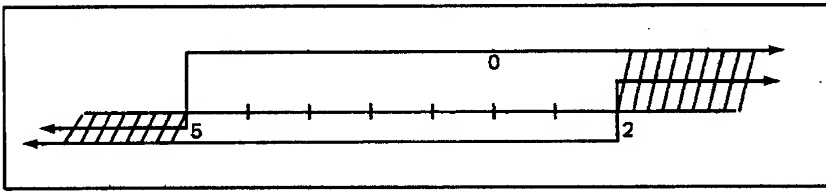
$$\begin{cases} x > 2 \quad \text{y} \quad x > -5 \\ \qquad\quad \text{ó} \\ x < 2 \quad \text{y} \quad x < -5 \end{cases}$$

y por consiguiente

$$[(2, \propto) \cap (-5, \propto)] \cup [(-\propto, 2) \cap (-\propto, -5)]$$

de donde obtenemos la siguiente solución. (*Véase* gráfico).

$$(2, \propto) \cup (-\propto -5) = (-\propto, -5) \cup (2, \propto).$$



$(-\propto, -5) \cup (2, \propto)$

b) *Método gráfico*

Utilizando este método obtenemos aquellos valores en donde cada uno de los factores que conforman la inecuación es igual a cero. En la inecuación que nos ocupa,

$$x - 2 = 0, \text{ entonces } x = 2$$
$$x + 5 = 0, \text{ entonces } x = -5$$

y utilizamos la siguiente disposición:

		-5	2
$x + 5$			
$x - 2$			
$(x + 5)(x - 2)$			

en donde cada casilla debe llevar un signo (+ o −), de acuerdo con los valores que toma cada factor en los respectivos intervalos.

Como $x + 5$ toma valores positivos siempre que x sea mayor que -5 y toma valores negativos cuando x sea menor que -5, entonces

	-5	2	
$x + 5$	−	+	+

De manera similar completamos la tabla para el factor $x - 2$, así:

	-5	2	
$x - 2$	−	−	+

Realizando el producto de los signos en cada casilla obtenemos:

	$(-\propto, -5)$	$(-5, 2)$	$(2, \propto)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+5)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Luego la solución es: $(-\propto, -5) \cup (2, \propto)$

c) *Método por intervalos*

Observe que en la última tabla del ejemplo anterior:

1. Los signos en la solución van intercalados.
2. El signo en cada intervalo (casilla) es el mismo; esto es, $x+5$ es siempre negativo entre $-\propto$ y -5, es siempre positivo entre -5 y 2 y es siempre positivo entre 2 y $\propto$.

Estas dos características se cumplen en cualquier inecuación, lo que nos permite obtener la solución de manera más corta y sencilla. En este caso utilizamos la siguiente disposición:

	$(-\propto, -5)$	$(-5, 2)$	$(2, \propto)$
$(x-2)(x+5)$			

Para obtener el signo correspondiente a cada casilla, se toma arbitrariamente cualquier valor en cualquier intervalo (casilla) y se remplaza en la inecuación. El signo obtenido se escribe en el intervalo escogido y a partir de éste, se intercalan los signos.

Tomemos por ejemplo en el intervalo $(-5, 2)$, el valor 0; al remplazar en $(x-2)(x+5)$ obtenemos -10. Esto quiere decir que todo este intervalo es negativo, luego el intervalo $(-\propto, -5)$ es positivo y el intervalo $(2, \propto)$ también es positivo. Gráficamente,

	$(-\propto, -5)$	$(-5, 2)$	$(2, \propto)$
$(x-2)(x+5)$	$+$	$-$	$+$

Como queremos solucionar $(x-2)(x+5) > 0$, entonces la solución es el intervalo (unión de intervalos) en el que el signo es positivo; luego el conjunto solución es $(-\propto, -5) \cup (2, \propto)$.

Ejemplos

Resuelva

1. $(x-6)(2x+3)(x-\frac{1}{2}) < 0$

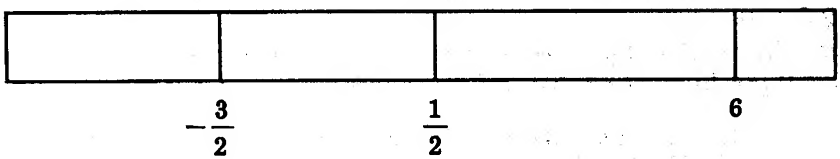
entonces

$$x - 6 = 0 \quad \text{si} \quad x = 6$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{si} \quad x = -\frac{3}{2}$$

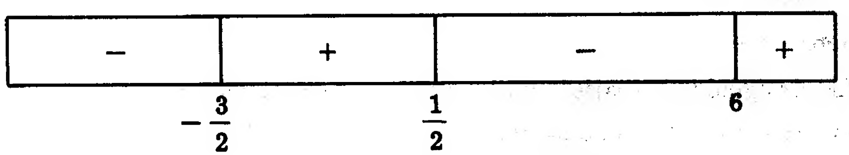
$$x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{si} \quad x = \frac{1}{2}$$

luego



Al remplazar en la inecuación x por cero obtenemos $(-6)\,(3)\,(-\frac{1}{2}) = +9$

Esto significa que:



Por tanto la solución es $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 6]$.

2. $$\frac{(x-2)\,(1-x)}{(2x+5)} \geqslant 0$$

Como las leyes de los signos son iguales para el producto que para el cociente, el método para resolver desigualdades que involucren cocientes es exactamente igual al método para resolver desigualdades con productos, salvo que se debe tener cuidado de *excluir* de la respuesta los valores que hagan el denominador cero.

Entonces

$$x - 2 = 0, \quad \text{si} \quad x = 2$$

$$1 - x = 0, \quad \text{si} \quad x = 1$$

$$2x + 5 = 0, \quad \text{si} \quad x = -\frac{5}{2}$$

Luego, al remplazar x por cero, obtenemos

+	−	+	−

$-\frac{5}{2}$ $\qquad\qquad$ 1 $\qquad$ 2

Por tanto la solución es: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup [1, 2]$. Observe que hemos excluido de la solución $-\frac{5}{2}$, dado que este valor hace cero al denominador.

3. $(x-10)(x+3)^3(x-2)^2 \geqslant 0$

Reescribiendo la inecuación obtenemos $(x-10)(x+3)(x+3)^2$ $(x-2)^2 \geqslant 0$
para $x \neq 2$, $x-2 \neq 0$ por lo que $(x-2)^2 > 0$; de manera similar para $x \neq -3$, $x+3 \neq 0$ por lo que $(x+3)^2 > 0$, entonces

$$\frac{(x-10)(x+3)(x+3)^2(x-2)^2}{(x+3)^2(x-2)^2} \geqslant \frac{0}{(x+3)^2(x-2)^2}$$

luego $(x-10)(x+3) \geqslant 0$, cuya solución es $(-\infty, -3] \cup [+10, \infty) \cup \{2\}$.
Observe que se ha incluido 2 en la solución ya que para $x = 2$; $(x-2)^2 \geqslant 0$.

8.7 Resumen

Recuerde que:

1. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:
   a) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
   b) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$, $\forall c$
   c) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$
   d) Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$
   e) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$
   f) Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a/c < b/c$
   g) Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$
   h) $a \cdot b > 0$ si, y solamente si, ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$)
   i) $a \cdot b < 0$ si, y solamente si, ($a < 0$ y $b > 0$) ó ($a > 0$ y $b < 0$)
   j) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.
2. Definimos los siguientes intervalos:
   a) $(a, b) = \{x / a < x < b\}$
   b) $[a, b] = \{x / a \leqslant x \leqslant b\}$
   c) $(a, b] = \{x / a < x \leqslant b\}$
   d) $[a, b) = \{x / a \leqslant x < b\}$

e) $(a, \infty) = \{x/x > a\}$
f) $(-\infty, b) = \{x/\ x < b\}$
g) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
h) $(a, a) = \phi$

3. a) $|x| < a$, entonces $-a < x < a$
b) $|x| > a$, entonces $x > a$ ó $x < -a$

8.8 Ejercicios y problemas

Resuelva las siguiente inecuaciones:

1. a) $-2x - 6 \geqslant 0$
b) $3x + 5 > x + 7$
c) $|x + 1| < 4$
d) $|2x + 4| \geqslant 9$
e) $|x - 3| < 0 \cdot 1$
f) $\frac{3}{2} x + 2 > x + 3(x - 9)$
g) $|-3x + 6| < 9$
h) $-9 \leqslant x + 9 < 7$
i) $-2 + x < 3x + 5 \leqslant \frac{1}{6}(x + 18)$
j) $|4x - 13| \leqslant 5$

2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - 8) \geqslant 0$
b) $x^2 - 5x + 6 < 0$
c) $x^2 + 5x - 1 \geqslant 5$
d) $\frac{(x + 3)(x - 6)(x + 2)}{(x - 1)(x + 9)} \geqslant 0$
e) $(x - 2)^3 (x + 5)^6 (x + 3) \leqslant 0$
f) $\frac{(x + \frac{1}{2})(2x + 3)}{x(c + 4)(3x + 5)} < 0$
g) $\frac{5}{x + 3} + \frac{1}{x - 1} > 2$
h) $-\frac{4}{x - 1} + \frac{7}{x + 4} < -1$
i) $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 > 0$

3. a) $|3 + |x + 2|| < 5$
   b) $|2 - |x + 3|| > 8$
   c) $|x - 2| \leqslant |x + 6|$
   d) $|2x + 5| \geqslant |3x - 8|$
   e) $|x + 2| + |2x + 1| \leqslant 15$

Referencias

Washington, Allyn. *Fundamentos de matemáticas con cálculo.* Fondo Educativo Interamericano.
Budnick, Frank. *Matemáticas aplicadas.* McGraw-Hill.
Larson-Hostetler. *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.
Lovaglia. *Algebra.* Harla.

CAPITULO 9

Matrices

OBJETIVOS

Al terminar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Aplicar correctamente las propiedades del álgebra de matrices (suma y producto) en la solución de problemas.
2. Identificar correctamente los diferentes tipos de matrices.
3. Hallar el valor de un menor y el cofactor de una matriz.
4. Aplicar el método de Gauss-Jordan en la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

9.1 Introducción

El término matriz fue utilizado por primera vez por los matemáticos ingleses Arthur Cayley (1821 - 1895) y James Sylvester (1814 - 1897) en el año de 1850, para distinguir las matrices de los determinantes. Cayley y Sylvester convirtieron las matrices en importantes instrumentos en la solución de problemas de las ciencias económico-administrativas.

En este capítulo trabajaremos con matrices, sus propiedades y operaciones, haciendo énfasis en las "operaciones elementales" para facilitar el estudio del método de reducción de Gauss-Jordan.

9.2 Concepto de matriz

Podemos decir que una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas. Consideremos los siguientes casos:

a). La tabla de posiciones en un torneo de fútbol.

	PJ	PG	PP	PE	Puntos
Equipo A	3	3	0	0	6
Equipo B	3	2	1	0	4
Equipo C	3	1	2	0	2

El arreglo

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

así dispuesto, es una matriz.

b) El estado financiero de la cuenta del señor Pérez durante 3 días es:

	RETIROS	CONSIGNACIONES	SALDO
Día 1	80,000	0	220.000
Día 2	100,000	140,000	260,000
Día 3	0	40,000	300,000

El arreglo

$$\begin{bmatrix} 80,000 & 0 & 220,000 \\ 100,000 & 140,000 & 260,000 \\ 0 & 40,000 & 300,000 \end{bmatrix}$$

así dispuesto, es también una matriz.

Definición: Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de números, distribuidos en m filas y n columnas colocados entre paréntesis, así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ij} & \ldots & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

El elemento a_{ij} está localizado en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna; $m \times n$ representa el tamaño (orden) de la matriz.

Ejemplos

Sea la matriz B

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

El elemento -3 está localizado en la fila 3, columna 2, por tanto $-3 = a_{32}$
El elemento 0 está localizado en la fila 2, columna 3, por tanto $0 = a_{23}$
El tamaño de la matriz es 3×3
Esto significa que en la matriz B existen 3 filas y 3 columnas.

9.3 Operaciones con matrices

Suma de matrices

Si A y B son dos matrices de tamaño $m \times n$ tal que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces la suma de A y B es la matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$A + B = (a_{ij} + B_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \quad \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

1.
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 + (-11) & 2 + 0 \\ 3 + 2 & 4 + 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

2.
$$E = \begin{bmatrix} \pi & -\sqrt{2} & -3 \\ 4 & \frac{1}{2} & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad F = \begin{bmatrix} k & 1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$E + F \quad \begin{bmatrix} \pi + k & -\sqrt{2} + 1 & 0 \\ 9 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Observe que en los anteriores ejemplos se sumaron matrices de igual orden. La suma entre matrices de orden diferente no se puede realizar.

Propiedades de la suma de matrices

Sin entrar a demostrar ninguna, la suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. *Propiedad conmutativa:* Si A y B son matrices de tamaño $m \times n$, entonces

$$A + B = B + A$$

2. *Propiedad asociativa:* Si A, B, C son matrices de tamaño $m \times n$, entonces

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3. *Existencia del idéntico:* Existe una matriz E de tamaño $m \times n$, tal que para toda matriz A de tamaño $m \times n$ se cumple que

$$A + E = E + A = A$$

La matriz E se denomina matriz nula y es aquella en la que todos sus elementos son iguales a cero. Los siguientes ejemplos ilustran cada una de las propiedades anteriores.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

1.

$$A + B = \begin{bmatrix} -4 + 0 & 5 + 8 \\ -2 + 3 & 1 - 1 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B + A \quad \begin{bmatrix} 0 - 4 & 8 + 5 \\ 3 - 2 & -1 + 1 \end{bmatrix} \qquad B + A \quad \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego se cumple que $A + B = B + A$.

2.

$$(A + B) + C \quad \begin{bmatrix} -4 + 0 & 5 + 8 \\ -2 + 3 & 1 - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{27}{2} \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 + 3 & 8 + \frac{1}{2} \\ 3 + 0 & -1 - 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \frac{17}{2} \\ 3 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{27}{2} \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

3. Idéntica para la matriz M

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$M + E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = M$$

Producto por un escalar

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, tal que $A = (a_{ij})$ y k es un número real, entonces:

$$K\,A = (K\,a_{ij})$$

$$\begin{bmatrix} k\,a_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & k_{a1n} \\ k_{a21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -10 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y sea $k = 2$

entonces

$$kB = 2B = \begin{bmatrix} 2(0) & 2(4) & 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2(3) & 2(-10) & 2(5) \\ 2(-1) & 2(1) & 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 6 & -20 & 10 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Si a una matriz A de tamaño $m \times n$, tal que $A = (a_{ij})$ la multiplicamos por -1, obtenemos la matriz $-A = (-a_{ij})$.

Ejemplo 2

Si $$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ entonces } -A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Diferencia de matrices

Si A y B son matrices de tamaño $m \times n$, entonces $A - B = A + (-B)$

Ejemplo 3

Sea $$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A - B = A + (-B) =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -4 \\ -\frac{7}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times k$, tal que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces el producto de A y B, denotado por AB, es una matriz C de tamaño $m \times k$, en donde

$$C = (c_{ij}) \text{ con } C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

$$= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

Ejemplo 4

Sea $W = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Observe que el tamaño de W es 3×2 y el tamaño de U es 2×3, por lo que el producto de W por U se puede realizar y el tamaño de la matriz producto será 3×3.

$$WU = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Según la definición:

$$\begin{aligned} c_{11} = \sum_{r=1}^{2} a_{1r}\, b_{r1} &= a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} \\ &= 0.2 + (-2) \cdot 1 \\ &= 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

Observe que el procedimiento anterior para obtener el elemento c_{11} (elemento de la primera fila y primera columna de la matriz producto), es equivalente a multiplicar término a término los elementos de la primera fila de W con la primera columna de U, y luego sumar dichos productos, así:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.2) + (-2\ .1) & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

De manera similar el elemento c_{12} de la matriz producto (elemento de la primera fila, segunda columna), se obtiene al multiplicar término a término la primera fila de W por la segunda columna de U y luego sumar dichos resultados, así:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & (0.4) + (-2.0) & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Procediendo en forma análoga para los demás elementos en la matriz producto obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.2)+(-2.1) & (0.4)+(-2.0) & (0.-1)+(-2.-2) \\ (2.2)+(-3.1) & (2.4)+(-3.0) & (2.-1)+(-3.-2) \\ (1.2)+(0.1) & (1.4)+(0.0) & (1.-1)+(0.-2) \end{bmatrix}$$

3×2 2×3

$$WU = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Ejemplo 5

Sea $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$ y $S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

En este caso,

$$TS = \begin{bmatrix} (2.0)+(0.1) & (2.4)+(0.-2) & (2.1)+(0.3) \\ (1.0)+(-3.1) & (1.4)+(-3.-2) & (1.1)+(-3.3) \\ (0.0)+(-1.1) & (0.4)+(-1.-2) & (0.1)+(-1.3) \\ (-2.0)+(2.1) & (-2.4)+(2.-2) & (-2.1)+(2.3) \end{bmatrix}$$

$$TS = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -3 & 10 & -8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -12 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Ejemplo de aplicación

Suponga que en una panadería se elabora pan integral y francés, para lo cual se utilizan los siguientes ingredientes: harina (H), levadura (L) y huevos (E). La matriz A muestra las unidades de materia prima utilizadas en la elaboración de 50 panes de cada tipo.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & L & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \end{array} \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{francés} \end{array}$$

Dicha panadería tiene una sucursal en el sur y otra en el centro. La siguiente matriz B muestra los precios por unidad de materia prima en cada sucursal.

$$B = \begin{array}{cc} S & C \\ \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 8 & 10 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}_{3 \times 2} & \begin{array}{c} H \\ L \\ E \end{array} \end{array}$$

La matriz $A \cdot B$ de tamaño 2×2, representará los costos totales en materia prima para cada tipo de pan en cada sucursal.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (15\cdot 10) + (3\cdot 8) + (4\cdot 25) & (15\cdot 15) + (3\cdot 10) + (4\cdot 30) \\ (10\cdot 10) + (2\cdot 8) + (6\cdot 25) & (10\cdot 15) + (2\cdot 10) + (6\cdot 30) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{array}{cc} S & C \\ \begin{bmatrix} 274 & 375 \\ 266 & 350 \end{bmatrix}_{2 \times 2} & \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{francés} \end{array} \end{array}$$

Por tanto 50 panes integrales producidos en el sur tienen un costo de \$274 y en el centro de \$375, mientras que 50 panes tipo francés se producen a un costo de \$266 en el sur y \$350 en el centro.

9.4 Tipos de matrices

A continuación describiremos las clases de matrices que se utilizan con mayor frecuencia. Al establecer esta clasificación hemos tenido en cuenta características como el orden y la disposición de sus elementos.

Vector fila: Se denomina así a una matriz A de orden $1 \times n$ y en forma general se escribe:

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots a_{1n}] \qquad 1 \times n$$

Vector columna: Se denomina así a una matriz B de orden $m \times 1$ y en forma general se escribe:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} \qquad m \times 1$$

Ejemplos

$C = [-1\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 1]$; la matriz C corresponde al vector fila de orden 1×6

$A = [5 \quad -2 \quad 3]$; la matriz A corresponde al vector fila de orden 1×3

$B=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, la matriz B es el vector columna de orden 2×1

$D=\begin{bmatrix} -4 \\ \pi \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, la matriz D es el vector columna de orden 3×1

Matriz nula: aunque anteriormente ya la habíamos mencionado, una matriz $m\times n$ donde todos sus elementos son iguales a cero se denomina matriz nula. Esta matriz recibe también el nombre de *matriz cero*.

Ejemplo 6

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

B se puede representar así: $B = 0$

Matriz cuadrada: Se denomina así aquella matriz donde el número de filas es igual al número de columnas.

Ejemplo 7

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos $d_{ij} = 0$, cuando i es diferente de j; la notaremos así:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Ejemplo 8 Sea la matriz B con los siguientes elementos:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Se dice que B es una matriz diagonal.

Matriz identidad: Es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal son iguales a 1. La podemos representar por I.

Ejemplo 9

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3}$$

La matriz identidad I también recibe el nombre de matriz *unidad*.

Matriz triangular superior: Una matriz cuadrada en la que todos sus elementos por debajo de la diagonal principal son cero, se denomina matriz triangular superior. De manera similar, es triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Matriz transpuesta: Sea A una matriz $m\times n$, la transpuesta de A, que se escribe A^t, es la matriz $n\times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas de A, tal que los renglones de A pasan a ser las columnas de A^t y viceversa.

Ejemplo 10

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 2 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ luego } A^t = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

9.5 Método de Gauss

En esta parte del capítulo ilustraremos un método que permite entre otras cosas encontrar la solución de un sistema de ecuaciones. El método consiste en reducir la matriz original a una matriz equivalente, pero más sencilla. La reducción de la matriz original se lleva a cabo teniendo en cuenta ciertas propiedades que cumplen las matrices, llamadas "operaciones elementales".

Operaciones elementales

Cuando sobre las filas de una matriz se realiza una de las siguientes operaciones, la matriz obtenida es equivalente a la original.

Primera operación: Intercambiar dos renglones de una matriz.

Segunda operación: Multiplicar o dividir un renglón o fila por un número diferente de cero.

Tercera operación: Sumar o restar a una fila un múltiplo de otra.

Ejemplo 11

Sea

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array}$$

Intercambiando la fila 1 con la fila 3 en A obtenemos la matriz A_1, equivalente a A.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la fila 2 de A por 4, por ejemplo, obtenemos A_2, equivalente a A.

$$A_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 4(2) & 4(-1) & 4(8) \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 32 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumando a la fila 3 el producto de la fila 2 por 5, obtenemos:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 32 \\ \frac{1}{2} + 5(2) & 0 + 5\,(-1) & 1 + 5\,(8) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 32 \\ \frac{21}{2} & -5 & 41 \end{bmatrix}$$

El procedimiento de eliminación de Gauss, consiste en transformar una matriz A de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & G_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & a_{m}{}^{2} & \dots & a_{mn} & G_n \end{array}\right]$$

mediante operaciones elementales, a una matriz de la forma

$$B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & d_n \end{array}\right]$$

en donde la matriz B, tomada hasta la línea interrumpida, es una matriz triangular superior que se obtiene por columnas, hallándose en cada columna, en primer lugar el uno de la diagonal principal y luego los demás elementos.

Ejemplo: Reducir mediante Gauss la siguiente matriz.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 10 \\ -6 & 4 & 9 & 30 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array}$$

Primero obtenemos el 1 de la primera columna. Observe que éste puede ser obtenido de dos formas diferentes: dividiendo la primera fila entre 2 (segunda operación elemental) o intercambiando la primera fila con la segunda (primera operación elemental).

Utilizamos esta segunda opción por ser más fácil, dado que la primera opción implica uso de fracciones. Por tanto, A es ahora:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 4 & 9 & 30 \end{array}\right]$$

El siguiente paso será obtener los correspondientes ceros de esta columna. Utilizando la operación elemental tres, multiplicando la fila uno por -2 y sumándola a la fila dos y multiplicando la fila uno por 6 y sumándola a la fila tres, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 2+1(-2) & 1+4(-2) & -1+3(-2) & -1+10(-2) \\ -6+1(6) & 4+4(6) & 9+3(6) & 30+10(6) \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 28 & 27 & 90 \end{array}\right]$$

A continuación, obtenemos el 1 de la diagonal principal en la segunda columna, dividiendo la segunda fila entre -7, así:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 28 & 27 & 90 \end{array}\right]$$

Multiplicando por -28 la segunda fila y sumándola con la tercera, obtenemos el cero de esta segunda columna, así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Multiplicando la fila tres por -1 para obtener el 1 de la diagonal principal en la columna tres, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Como esta última matriz (hasta la línea interrumpida) es una matriz triangular superior, el proceso ha terminado.

En algunos casos el proceso exige que la matriz A sea reducida hasta una matriz idéntica; en tal caso los ceros sobre la diagonal principal se obtienen utilizando el proceso antes descrito.

Ejemplos de aplicación

1. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ x + 4y + 3z &= 10 \\ -6x + 4y + 9z &= 30 \end{aligned}$$

La siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 10 \\ -6 & 4 & 9 & 30 \end{array}\right]$$

representa al anterior sistema, en donde cada columna está formada por los coeficientes de cada una de las variables y la última columna corresponde a los términos independientes, (t. i.) así:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t.i. \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 10 \\ -6 & 4 & 9 & 30 \end{array}\right]$$

En el ejemplo anterior mostramos cómo, mediante las operaciones elementales, la matriz A se transforma en la matriz equivalente.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t.i \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Esta matriz reducida nos permite encontrar fácilmente la solución al sistema, ya que ésta representa al sistema:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 10 \\ y + z &= 3 \\ z &= -6 \end{aligned}$$

Utilizando el método conocido como "solución en reserva", obtenemos:

$$\begin{aligned}
z &= -6, \text{ luego}\\
y + (-6) &= 3; \quad y = 9\\
x + 4(9) + 3(-6) &= 10; \quad x = -8
\end{aligned}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
4x - y - 3z &= 1\\
8x + y - z &= 5\\
2x + y + 2z &= 5
\end{aligned}$$

El anterior sistema origina la matriz

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -3 & 1\\ 8 & 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l}\text{fila 1}\\ \text{fila 2}\\ \text{fila 3}\end{array}$$

Para hacer el primer elemento de la primera fila igual a 1, dividimos por 4 la primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 8 & 1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Ahora para obtener ceros en el resto de la primera columna, sumamos a la segunda y tercera fila el producto de la primera fila por -8 y -2, respectivamente así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 8+(-8)(1) & 1+(-8)\left(-\frac{1}{4}\right) & -1+(-8)\left(-\frac{3}{4}\right) & 5+(-8)\left(\frac{1}{4}\right)\\ 2+(-2)(1) & 1+(-2)\left(-\frac{1}{4}\right) & 2+(-2)\left(-\frac{3}{4}\right) & 5+(-2)\left(\frac{1}{4}\right) \end{array}\right]$$

Resolviendo las operaciones, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 3 & 5 & 3\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

Para obtener el 1 de la segunda fila segunda columna, dividimos la segunda fila entre 3, así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

Para obtener el cero de la segunda columna tercera fila, sumamos a la tercera fila el producto de la segunda fila por $-\frac{3}{2}$.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0+\left(-\frac{3}{2}\right)(0) & \frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)(1) & \frac{7}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) & \frac{9}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)(1) \end{array}\right]$$

Resolviendo se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Observe que el paso para originar el 1 de la tercera columna tercera fila *no* es necesario, porque se obtuvo como consecuencia del paso anterior, luego la solución del sistema será:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z &= \frac{1}{4} \\ y + \frac{5}{3}z &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$x = \frac{3}{2}\,; \quad y = -4\,; z = 3$$

9.6 Inversa de una matriz

Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y existe una matriz B de tamaño $n \times n$ tal que $A\ B = B \cdot A = I$, entonces decimos que A es invertible[21] y B se llama la inversa de A.

Notaremos la inversa de A por A^{-1}, así:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Ejemplo 12 Consideremos el siguiente par de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & +\frac{8}{11} \\ +\frac{2}{11} & +\frac{6}{11} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (-3)\left(-\frac{1}{11}\right) + (4)\left(\frac{2}{11}\right) & (-3)\left(\frac{8}{11}\right) + (4)\left(\frac{6}{11}\right) \\ (1)\left(-\frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{11}\right) & (1)\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{11}\right) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11} & -\frac{24}{11} + \frac{24}{11} \\ -\frac{1}{11} + \frac{1}{11} & \frac{8}{11} + \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que $B \cdot A$ también es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por lo anterior, afirmamos que B es la inversa de A. La siguiente definición nos permite encontrar A^{-1} (inversa de A) para una matriz A de tamaño 2×2.

Definición:

Si $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ entonces

---

[21] Una matriz A invertible se denomina no singular.

$$A^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\[2ex] -\dfrac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo 13

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, hallar A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{(3)(2)-(0)(1)}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{0}{6} \\[1ex] -\frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\[1ex] -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para hallar la inversa de una matriz 3×3, utilizaremos el método de Gauss de la siguiente manera:

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Para calcular A^{-1} utilizamos la siguiente disposición:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y mediante operaciones elementales la transformamos en

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

de esta manera,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

es la inversa de A.

Ejemplos:

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ halle A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array}$$

Intercambiando la segunda fila con la primera fila y multiplicando ésta por -1, obtenemos.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando por (-4) la primera y sumándola con la segunda y multiplicando la primera por (-3) y sumándola con la tercera.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +7 & +6 & +1 & +4 & 0 \\ 0 & +7 & +4 & 0 & +3 & +1 \end{array}\right]$$

Dividiendo entre 7 la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando por 2 la segunda y sumándola con la primera y multiplicando la segunda por —7 y sumándola con la tercera.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Dividiendo entre —2 la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Multiplicando la tercera por $-\frac{6}{7}$ y sumándola con la segunda y multiplicando la tercera por $-\frac{5}{7}$ y sumándola con la primera.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & +\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & +\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo de aplicación

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 6 \\ -x + 2y + z &= 7 \\ 3x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

$$\text{Si} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

el anterior sistema puede escribirse así:
$A \cdot X = B$, que se denomina la representación matricial del sistema.
Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} existe, y $(A^{-1} \cdot B)X = A^{-1} \cdot B$; ésto es $IX = A^{-1}B$. Luego $X = A^{-1} \cdot B$, lo que nos permitirá encontrar la solución del sistema.
En el ejercicio anterior obtuvimos la inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & +\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, como $X = A^{-1}\ B$ entonces,

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & +\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{14}\right)(6) + \left(-\frac{3}{14}\right)(7) + \left(\frac{5}{14}\right)(11) \\ \left(-\frac{2}{7}\right)(6) + \left(\frac{1}{7}\right)(7) + \left(+\frac{3}{7}\right)(11) \\ \left(\frac{1}{2}\right)(6) + \left(\frac{1}{2}\right)(7) + \left(-\frac{1}{2}\right)(11) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego la solución al sistema es $x = 2, y = 4, z = 1$

9.7 Resumen

Recuerde que:

1. Una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas.
2. El elemento a_{ij} está localizado en la intersección de la i-ésima fila y j-ésima columna.
3. Una matriz se puede notar por $A = (a_{ij})$.
4. Si A y B son dos matrices de tamaño $m \times n$ tal que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces la suma de A y B es la matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
5. La suma de matrices cumple las propiedades:
   — Conmutativa $A + B = B + A$.
   — Asociativa $(A + B) + C = A + (B + C)$.
   — Idéntica $A + E = E + A + A$.
6. Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ tal que $A = (a_{ij})$ y K es un número real, entonces $K \cdot A = (K \cdot a_{ij})$.
7. Para realizar el producto entre dos matrices A y B se debe cumplir que el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.
8. $A \cdot B \neq B \cdot A$ no cumple conmutativa.
9. $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$ cumple asociativa.

9.8 Ejercicios y problemas

1. Resuelva, si es posible, las siguientes operaciones indicadas.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $4\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

e) $8\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{7}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Encuentre el producto de las matrices dadas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

3. Resuelva

a) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ calcule $A^2 - 7A + 7I$

b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ calcule $A^2 - I$

c) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & e \end{bmatrix}$

Calcule $A + B$ y $A \cdot B$

4. Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones lineales dado:

a) $2x - 5y = -8$
$x + 3y - 7 = 0$

b) $8x - 4y + 4z = 3$
$x - 2y + z = 0$
$4x + 5y = 4 - 12z$

c) $x - z = 0$
$y + z = 1$
$2x - y = 5$

5. Resuelva, usando el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $x + 2y + 3z = 6$
$3x + y = 5$
$2x + 2y + z = 4$

b) $-3x + 2z - 8 = 0$
$x + 4y + 3z = 13$
$2x - y + 7 = 0$

c) $2x - 3y + z = -3$
$4x + 2z = 0$
$-x + 2y = 2$

6. Encuentre las inversas de las matrices dadas, si existen. Compruebe los resultados en las fórmulas $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = I$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Utilizando el concepto de matriz inversa solucione:

a) $2x + y - z = \frac{5}{3}$

$2y + z = \frac{7}{3}$

$5x + 2y - 3z = \frac{7}{2}$

b) $x + 3y + 4z = 16$
$3x - y + 6z = 6$
$-x + 5y + z = 18$

Referencias

Grossman, Stanley. *Algebra lineal.* Grupo Editorial Iberoamericano.
Lipschutz, Seymour. *Algebra lineal.* McGraw-Hill.
Anton, Howard. *Introducción al álgebra lineal.* Limusa.

CAPITULO 10

Funciones

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Determinar cuándo una relación es función.
2. Encontrar el dominio y el rango de una función.
3. Realizar operaciones con funciones.
4. Construir gráficas de algunas funciones.

10.1 Introducción

En muchas ocasiones el valor de determinada cantidad depende del valor de otra; el ingreso, por ejemplo, depende del precio y de la cantidad de unidades demandadas; el área de un círculo depende del valor del radio, etc. Estas relaciones y muchas otras más, en las cuales una variable depende de otra, se representan en matemáticas por medio de funciones.

El concepto moderno de función es el resultado del esfuerzo de muchos matemáticos de los Siglos XVII y XVIII, quienes llegaron a la conclusión de que distintos fenómenos de la vida real podían representarse por ciertos modelos matemáticos denominados funciones. Entre los matemáticos que más se destacaron en el trabajo de funciones está Leonard Euler (1707 - 1783), a quien se debe la notación $y = f(x)$.

En este capítulo estudiaremos el concepto de función, la forma de representar funciones por medio de gráficas, sus propiedades y algunas funciones especiales.

10.2 Producto cartesiano

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, las parejas ordenadas

$(1, a)$, $(1, b)$, $(2, a)$, $(2, b)$, $(3, a)$, $(3, b)$, son todas de la forma (x, y) en donde $x \in A$ y $y \in B$.

El conjunto formado por todas las parejas de la forma (x, y), tal que $x \in A$ y $y \in B$, se denomina el producto cartesiano de A y B y se nota $A \times B$. Esto es:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo 1

Sean $M = \left\{\frac{1}{2}, -2, 4\right\}$ y $N = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right\}$

El producto cartesiano de M y N es $M \times N = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{2}{5}\right), \left(4, \frac{1}{2}\right), \left(4, -\frac{2}{5}\right)\right\}$.

Ejemplo 2

Sea $S = \{a, b, c\}$, entonces el producto cartesiano de S es:

$S \times S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

10.3 Relaciones

En los capítulos anteriores hemos discutido las ecuaciones e inecuaciones en dos variables x y y; hemos visto, además, cómo se relacionan entre sí los valores de x y y por medio de una condición dada. Hasta ahora nuestro trabajo se limitó a situaciones tan sencillas como:

$$y = 3x + 5 \qquad y > 4x + 9$$
$$y = 2x^2 + 5x + 7 \qquad y \geqslant x^2 + 4x + 6$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

en las cuales describimos la relación entre x y y mediante una gráfica conveniente en el plano. En este capítulo discutiremos este concepto de relación desde un punto de vista más general. Comenzaremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 3

Consideremos el conjunto $A = \{0, 1, 4\}$ y el conjunto $B = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ y r la relación "la raíz de". Por medio de esta relación podemos asociar los elementos de A y B, de tal forma que a cada x que pertenece a A, le corresponda un elemento de B definido como su raíz.

Simbólicamente, esta relación la representaremos así: $r : x \to \pm\sqrt{x}$

Dicha relación también se puede representar mediante un diagrama como el de la Figura 10.1. El conjunto A se denomina *dominio* de la relación y el conjunto B el *rango*[22] de la relación.

En esta relación se asignan los pares ordenados (0, 0), (1, 1), (1, −1), (4, 2) y (4, −2), en donde los componentes de cada pareja son obtenidos a partir de la ecuación $y = \pm\sqrt{x}$, siendo x un elemento del dominio de r.

[22] Rango, recorrido e imagen generalmente representan lo mismo.

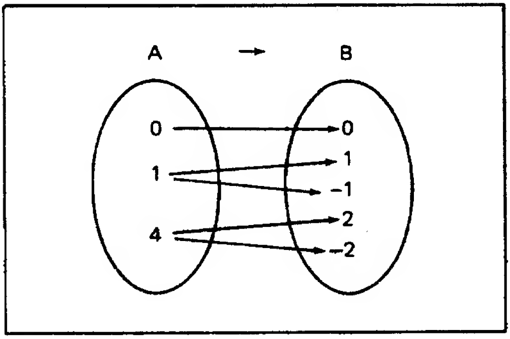


Figura 10.1 La relación $y = \pm\sqrt{x}$.

Observe que el conjunto de las parejas ordenadas (0, 0), (1, 1), (1, −1), (4, 2), (4, −2), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Ejemplo 4

Sea R la relación ser menor que ($<$) de los reales en los reales, $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por "$x$ es menor que y". Esta relación se define simbólicamente por $x < y$. Algunos de los pares ordenados que la cumplen estarán representados en la Figura 10.2.

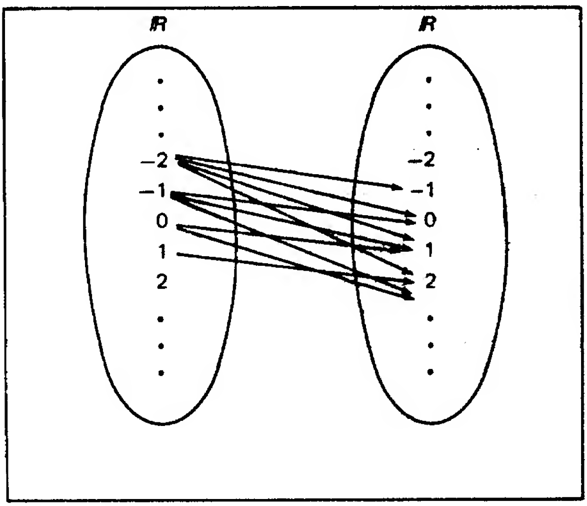


Figura 10.2 La relación $x < y$.

Algunas parejas de la relación son:

$n = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2) \ldots\}$

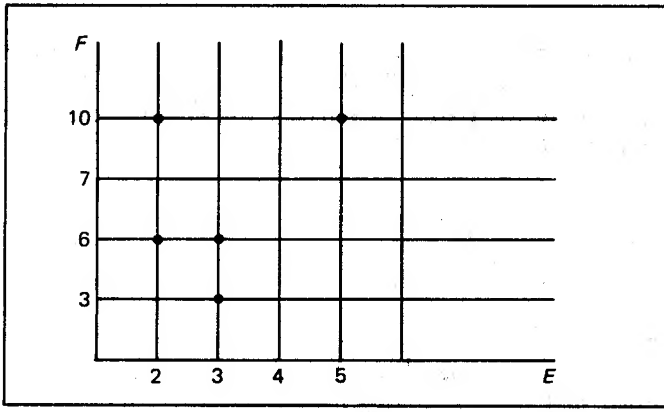
nuevamente, $n \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observando y analizando los ejemplos anteriores, podemos concluir que:

> Un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ es una relación r de A en B. Las parejas ordenadas de dicho subconjunto satisfacen la condición dada por r. El conjunto de todos los primeros componentes de una relación, que pertenece a A, se llama dominio. El conjunto de todos los segundos componentes de una relación, que pertenece a B, se llama rango.

Ejemplo 5

Sea t: $E \rightarrow F$, donde $E = \{2, 3, 4, 5\}$ y $F = \{3, 6, 7, 10\}$, definida por "y divisible entre x". El conjunto de las parejas ordenadas que cumplen la relación es: $\{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$. La representación gráfica de este conjunto es:



Observando las parejas ordenadas, o el gráfico de la relación, podemos determinar que el conjunto $\{2, 3, 5\}$ constituye el dominio de t ya que son éstos los elementos de E que cumplen la condición establecida. En forma similar podemos determinar que el rango de la relación t es el conjunto $\{3, 6, 10\}$ elementos de F que cumplen la condición.

10.4 Funciones

Ejemplo 6

Sean X el conjunto de los números reales, Y el conjunto de los números reales no negativos y f la relación "el cuadrado de". Esto es, para $x \in X$ y $y \in Y$, la relación f se define simbólicamente por f: $x \rightarrow x^2$, $y = x^2$ o $f(x) = x^2$.

Existen infinitas parejas que satisfacen esta relación, por ejemplo $(-4, 16)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(3, 9)$ y en general todas aquellas de la forma (x, x^2). La Figura 10.3 lo ilustra.

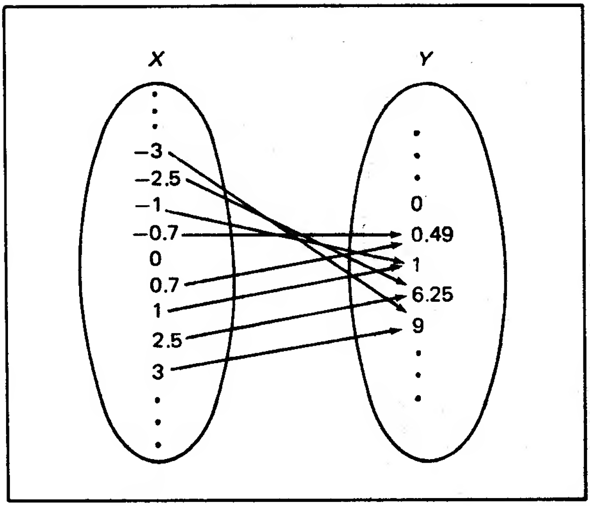


Figura 10.3 La función $y = x^2$.

Observe que en este caso la segunda componente de cada pareja se obtiene elevando al cuadrado la primera componente. Podemos decir también que cada elemento x del conjunto X ha sido transformado en x^2, mediante la regla establecida por la relación, "y es el cuadrado de x". Esta relación tiene una característica especial: cada elemento del conjunto X es transformado en un único elemento del conjunto Y. Una relación que cumple esta característica recibe el nombre de función.

Definición: Una función es una relación en la que todos los elementos de un conjunto llamado dominio son transformados en un único elemento de un conjunto llamado rango.

Ejemplo 7

Sea $f: A \to B$, la función definida por $f(x) = x + 1$, con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. En este caso:

$f(1) = 1 + 1 = 2$
$f(2) = 3$
$f(3) = 4$
.
.
.
$f(6) = 7$

En la Figura 10.4 aparece el diagrama que ilustra la situación.

El conjunto A es el dominio de la función. El conjunto B se denomina el conjunto de llegada de la función.

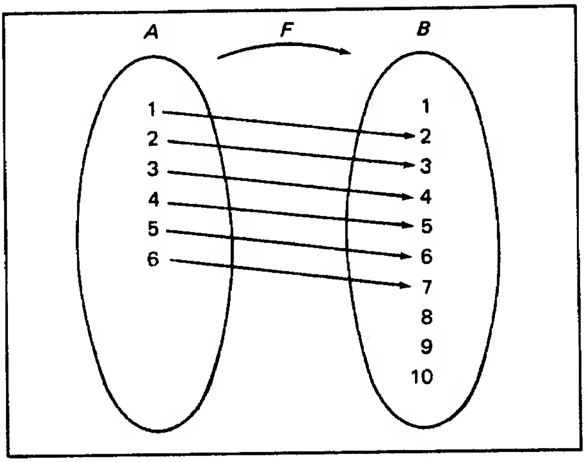


Figura 10.4 $y = x + 1$.

El conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es el rango de la función, en este caso diferente de B.

Ejemplo 8

Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $g(x) = |x|$

En este caso:

$$g(-2) = |-2| = 2$$

$$g(2) = |2| = 2$$

$$g(0) = |0| = 0$$

$$g(a) = |a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

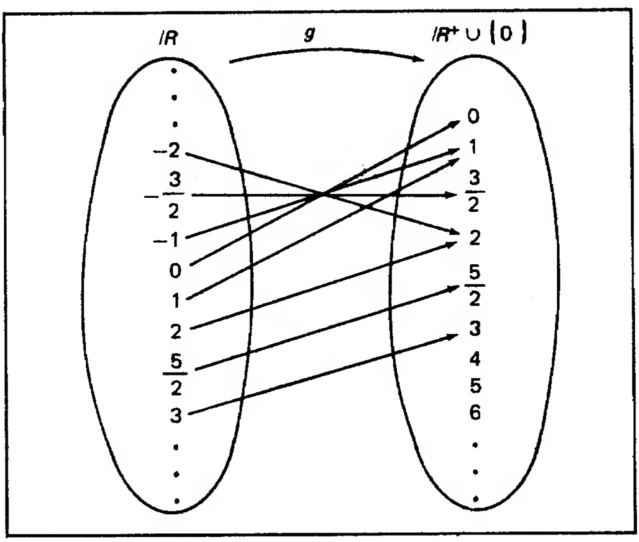


Figura 10.5 $g(x) = |x|$.

El dominio de g es el conjunto de los reales. Como $|x| \geq 0$, entonces el rango de g es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que coincide en este caso con el conjunto de llegada. *Una función donde el rango es igual al conjunto de llegada se denomina función sobreyectiva.*

Ejemplo 9

Sea $h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $h(x) = x^2 + 3$

En este caso:

$$h(1) = 1^2 + 3 = 4$$
$$h(4) = 4^2 + 3 = 19$$
$$h(12) = 12^2 + 3 = 147$$

El dominio de h es el conjunto de los reales positivos. Como el rango es diferente del conjunto de llegada (*véase* Figura 10.6), entonces la función no es sobreyectiva. Observe, en cambio que cada elemento del rango está relacionado con un único elemento del dominio; una función como ésta se denomina *función inyectiva* (*uno a uno*).

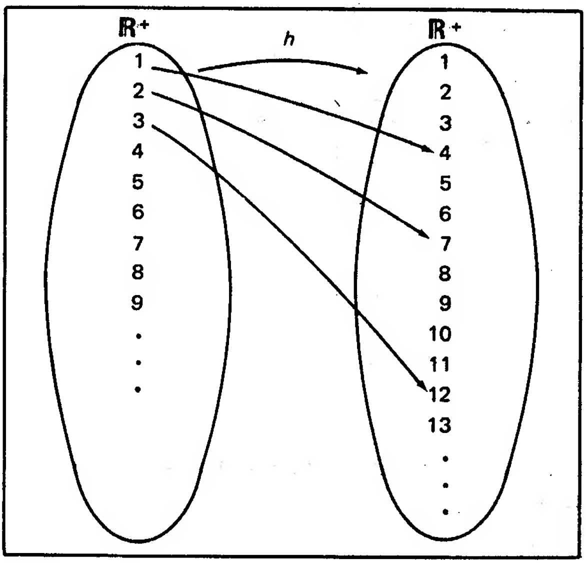


Figura 10.6 $h(x) = x^2 + 3$.

10.5 Gráfica de una función

En una función de la forma $f : x \rightarrow y$, tal que $f(x) = y$, x se denomina la variable independiente y a la variable y se le denomina dependiente.

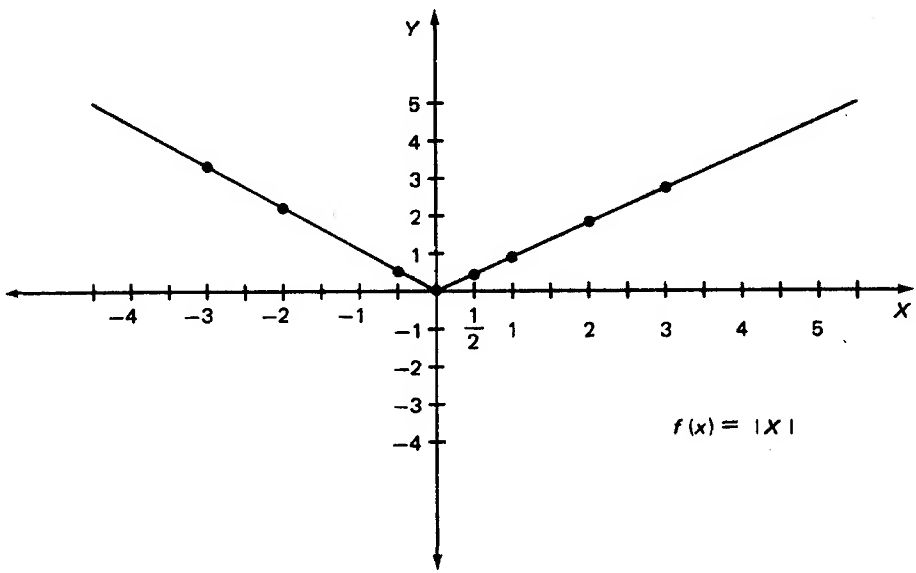
Para realizar la gráfica de una función construimos una tabla en donde se muestran algunos valores de x y y. Para la construcción de la tabla asignamos a la variable independiente algunos valores del dominio, y encontramos el correspondiente valor para y por medio de la definición de la función. A continuación ubicamos en el plano cartesiano las parejas de la forma (x, y); según el dominio de la función, dichos puntos se podrán unir mediante un trazo continuo.

Ejemplo 10

Si f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^{+} \cup \{0\}$, tal que $f(x) = |x|$, entonces

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	3	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

Localizando los puntos en el plano cartesiano, tenemos:



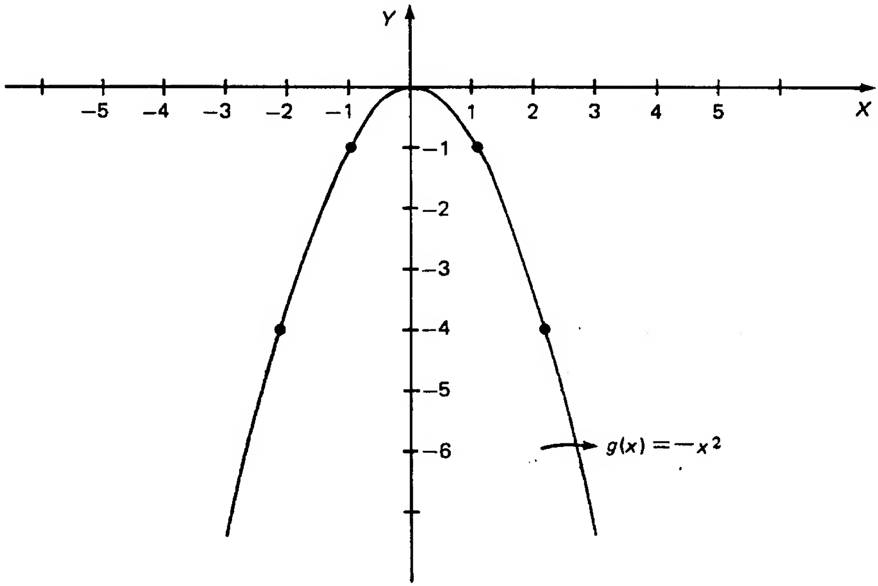
Debido a que el rango es el conjunto de todos los reales positivos, fue posible unir los puntos.

Ejemplo 11

Si g: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $g(x) = -x^2$, entonces

x	-2	$-\frac{1}{3}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$g(x)$	-4	$-\frac{1}{9}$	-1	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Al localizar los puntos en el plano, se tiene:



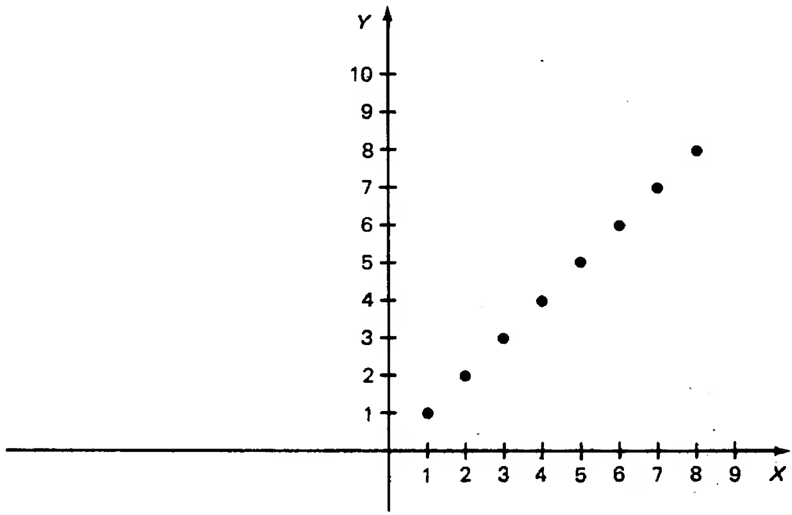
Como el rango es el conjunto de los reales positivos, unimos los puntos.

Ejemplo 12

Si h: $N \longrightarrow N$ tal que $h(x) = x$, entonces:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8

Al localizar los puntos en el plano, se tiene:



En este caso los puntos no se pueden unir dado que el dominio de la función son solamente los números naturales.

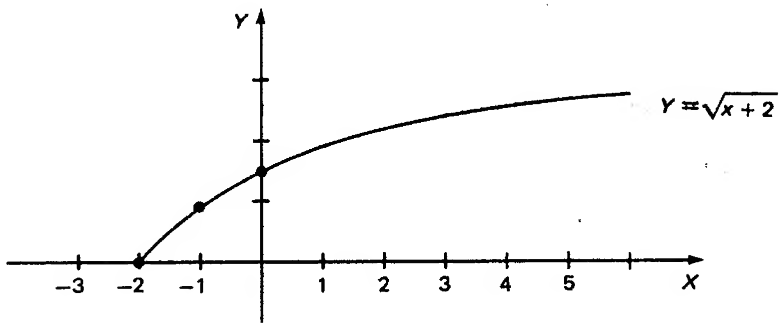
Ejemplo 13

Grafique $f(x) = y = \sqrt{x+2}$

Empezaremos por establecer el dominio de la función. Es claro que $x + 2 \geqslant 0$, luego el dominio de f es: $D_f = [-2\ ,\ \infty)$.
Tabulando,

x	-2	-2	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	7
$f(x)$	0	1	1.41	1.58	1.71	2	2.23	3

Observe que a medida que crecen los valores de x, las imágenes crecen también.



Ejemplo 14

Grafique $f(x) = y = \dfrac{1}{x+3}$

El dominio de esta función es: $D_f = \{x \mid x \in R \ \wedge \ x \neq -3\}$

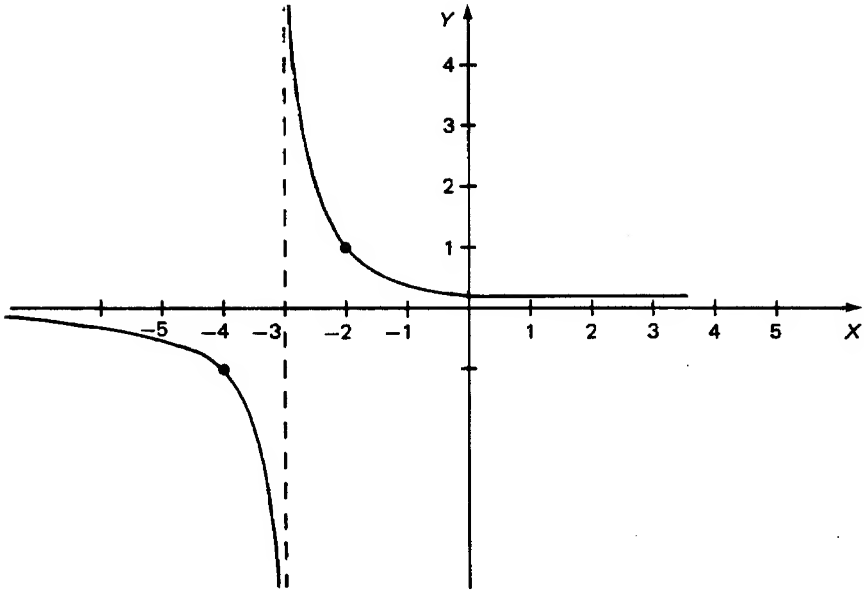
Observe que se debe excluir a -3 del dominio de la función ya que este valor la indetermina.
Tabulando,

x	-7	-4	-3.5	-3.3	-3.1	-2.9	-1.7	-2	-1	0	3	5
$f(x)$	-0.125	-1	-2	-3.33	-10	10	3.33	1	0.5	0.33	0.25	0.125

Observe:

- A medida que x toma valores cercanos a -3, los valores de y se hacen cada vez más grandes (se alejan cada vez más del eje X).
- A medida que x toma valores grandes, los valores de y son cada vez más pequeños aproximándose a cero.

Graficando,



Rectas como $x = -3$ y $y = 0$ (eje X) a las que la gráfica se acerca para ciertos valores, se denominan asíntotas de la gráfica. $x = -3$ es una asíntota vertical y $y = 0$ es una asíntota horizontal.

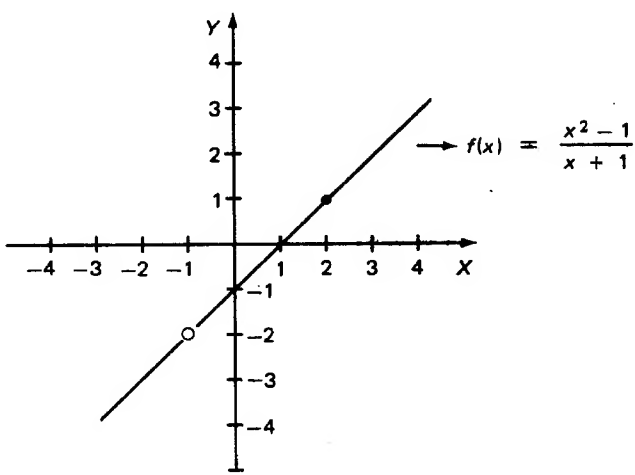
Ejemplo 15

Grafique $f(x) = y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

El dominio de la función es $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -1\}$

Observe que algebraicamente $(x^2 - 1) / (x + 1) = x - 1$, entonces $f(x) = x - 1$, con $x \neq -1$.

Luego la gráfica será una recta discontinua en $x = -1$.



10.6 Algebra de funciones

Dos o más funciones pueden combinarse para obtener nuevas funciones.

Dichas combinaciones se logran mediante las operaciones suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones, que se definen así:

1. Suma de funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. Diferencia de funciones:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

3. Producto de funciones:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

4. Cociente de funciones:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x),\ g(x) \neq 0$$

En cada una de las operaciones anteriores x está tanto en el dominio de f como en el dominio de g.

5. Composición de funciones:

a) g compuesto f: $(f \text{ o } g)(x) = f(g(x))$, en donde el dominio de $(f \text{ o } g)(x)$ es el conjunto de las x tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

b) f compuesto g: $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x))$ en donde el dominio de $(g \text{ o } f)(x)$ es el conjunto de las x tales que $f(x)$ está en el dominio de g.

Ejemplo 16

Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 5$, halle

a) $(f+g)(2)$

b) $(g-f)(-1)$

c) $(f \cdot g)(\sqrt{2})$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(a)$

e) $(f \text{ o } g)(x)$

f) $(g \text{ o } f)(-3)$

Solución:

a)
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2+1) + (x-5) \\ &= x^2 + x - 4 \\ (f+g)(2) &= 2^2 + 2 - 4 = 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (g-f)(x) &= g(x) - f(x) \\ &= (x-5) - (x^2+1) \end{aligned}$$

$$= x - 5 - x^2 - 1$$
$$= -x^2 + x - 6$$
$$(g - f)(-1) = -(-1)^2 + (-1) - 6 = -8$$

c) $(f \cdot g)(x) \quad = f(x) \cdot g(x)$
$$= (x^2 + 1)(x - 5)$$
$$= x^3 - 5x^2 + x - 5$$
$$(f \cdot g)(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 5(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 5$$
$$= 2\sqrt{2} - 10 + \sqrt{2} - 5$$
$$= 3\sqrt{2} - 15$$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$$= \frac{x^2 + 1}{x - 5}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{a^2 + 1}{a - 5}, \quad a \neq 5$$

e) $(f \circ g)(x) \quad = f(g(x))$
$$= f(x - 5)$$
$$= (x - 5)^2 + 1 = x^2 - 10x + 26$$

f) $(g \circ f)(x) \quad = g(f(x))$
$$g(x^2 + 1)$$
$$(x^2 + 1) - 5$$
$$(g \circ f)(-3) = [(-3)^2 + 1] - 5$$
$$= 5$$

Ejemplo 17

Siendo $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ y $g(x) = \sqrt{x + 5}$, calcule

a) Dominio de f y dominio de g

b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) Dominio $(g \circ f)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right) \quad (x^2 - 5)$

Solución:

a) Dominio de $f = \{\, x \mid x \in R \quad \wedge \quad x \neq 1 \,\}$

Dominio de $g = \{x \mid x \in R \quad \wedge \quad x + 5 \geqslant 0\}$

$= [-5, \infty)$

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\frac{x-1}{x}} = \dfrac{x}{x-1}$

c) Dominio de $(g \circ f)(x) = \{x \mid x \in \text{Dom } f \wedge f(x) \in \text{Dom } g$

$= \left\{x / x \neq 1 \wedge \frac{1}{1-x} + 5 \geqslant 0\right.$

$= (-\infty, 1) \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\frac{1}{1-x}}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{1}{(1-x)\;(\sqrt{x+5}\,)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x^2 - 5) = \frac{\sqrt{(x^2 - 5) + 5}}{1 - (x^2 - 5)}$$

$$= \frac{|x|}{6 - x^2}$$

10.7 Funciones implícitas

Como definimos en el Capítulo 6, la demanda para un cierto artículo es una ecuación de la forma $ap + bx = c$, donde a, b y c son constantes, que relaciona el número de artículos vendidos y el precio a que éstos se venden.

Como el ingreso R, se define $R = x\,p$, entonces R se puede expresar en términos de x, el número de unidades vendidas, o de p, el precio, así:

$$R(x) = x\left(\frac{c - bx}{a}\right) \qquad (1)$$

$$R(p) = \left(\frac{c - ap}{b}\right) \cdot p \qquad (2)$$

Las ecuaciones anteriores expresan en forma explícita de qué variable depende el ingreso; una función así definida se denomina función explícita. También son funciones explícitas: $y(x) = 8x^2 + 2$

$$s(t) = 100 + 20t - 5t^2$$

$$u(p) = \left(\frac{1400 - p}{40}\right) \cdot p - 3\,000$$

ya que en todos estos casos, cada una de las funciones se da explícitamente en términos de una variable, x, t, p, respectivamente.

Sin embargo, no todas las funciones son explícitas. Ecuaciones como:

$$40x + p = 1400$$

$$3xy - 2x\frac{1}{3} + \sqrt{y} = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

en las que ninguna está en función de una variable, se denominan funciones implícitas.

En algunos casos, de una función implícita se pueden obtener las funciones explícitas correspondientes, así:

$$\text{De } 40x + p = 1400 \quad \begin{cases} p = 1400 - 40x = f(x) \\ x = \dfrac{1400 - p}{40} = f(p) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \begin{cases} x = r^2 - y^2 = g(y) \\ y = r^2 - x^2 = g(x) \end{cases}$$

Implícitas **Explícitas**

En otros, como por ejemplo en

$$3xy - 2x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{y} = 0$$

el despejar alguna de las variables es un proceso bastante complicado y, en algunos casos, imposible.

Sin embargo, existen procesos que permiten trabajar directamente con las funciones implícitas (derivación implícita, por ejemplo)[23], sin tener que obtener la función explícita.

10.8 Algunas funciones especiales

Función determinante

Si A es una matriz 2×2, tal que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

entonces se define el determinante de A, $\det A$, de la siguiente manera:

[23] Ver derivación implícita, página 268.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

El determinante es una función que transforma una matriz cuadrada en un número real.

Ejemplo 18

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ entonces

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4\cdot 5) - (-2\cdot 7)$$
$$= 20 + 14$$
$$= 34$$

Para el caso de una matriz 3×3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

se define $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= [(a_{11}\ a_{22}\ a_{33}) + (a_{21}\ a_{32}\ a_{13}) + (a_{31}\ a_{12}\ a_{23})] - [(a_{31}\ a_{22}\ a_{13}) + (a_{11}\ a_{32}\ a_{23}) + (a_{21}\ a_{12}\ a_{33})]$$

Para facilitar el aprendizaje de la fórmula anterior, existe un método conocido con el nombre de *regla de Sarrus*, que consiste en repetir las dos primeras filas (o las dos primeras columnas) debajo de la última fila (o a continuación de la última columna) y proceder en forma similar al caso 2×2, como se muestra a continuación:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= [(a_{11}\ a_{22}\ a_{23}) + (a_{21}\ a_{32}\ a_{13}) + (a_{31}\ a_{12}\ a_{23})]$$

$$- [(a_{31}\ a_{22}\ a_{13}) + (a_{11}\ a_{32}\ a_{23}) + (a_{21}\ a_{12}\ a_{33})]$$

Ejemplo 19

$$Ai \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{entonces}$$

$$\det \ A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{repitiendo las dos primeras filas}$$

$$= \quad [(-1\cdot-2\cdot 4) + (5\cdot 8\cdot 2) + (1\cdot 4\cdot 3)] \quad - \quad [(1\cdot-2\cdot 2) + (-1\cdot 8\cdot 3) + (5\cdot 4\cdot 4)]$$
$$= \quad (8 + 80 + 12) - (-4 - 24 + 80) = 100 - 52 = 48$$

Función parte entera

Se define la parte entera de un número real x, como el mayor entero que es menor o igual a x. Se denota esta función por $y = [x]$

Ejemplo 20

$[3.8] \ = 3$

$[4.5] \ = 4$

$[-1.9] = -2$

La función parte entera se muestra en la Figura 10.7.

Tal como se observa en la gráfica, la función parte entera es escalonada.

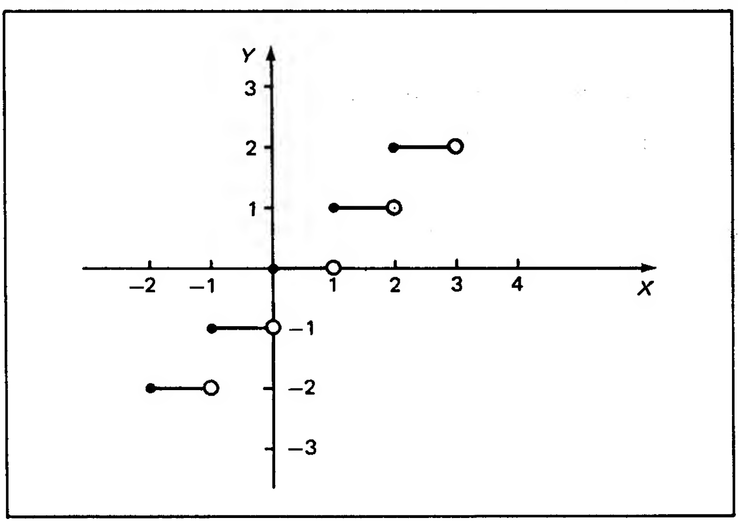


Figura 10.7 Función parte entera $y = [\,x\,]$

Función inversa

Sea $f = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ una función uno a uno, con dominio X y rango Y. Una función g, con dominio Y y rango X se denomina la *función inversa de f*, si

$$f[g(x)] = x, \quad \forall x \in Y, \qquad \text{y}$$
$$g[f(x)] = x, \quad \forall x \in X.$$

Frecuentemente se representa $g(x)$ por $f^{-1}(x)$. De esta manera $f[f^{-1}(x)] = x$ y $f^{-1}[f(x)] = x$

Ejemplo 21

Si $f(x) = 2x + 3$, $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Veamos, $\qquad f(8) = 2(8) + 3 = 16 + 3 = 19$

$$f^{-1}(19) = \frac{19-3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

esto es $f^{-1}[f(8)] = f^{-1}(19) = 8.$

Ahora, $f^{-1}(31) = \dfrac{31-3}{2} = \dfrac{28}{2} = 14$

$$f(14) = 2(14) + 3 = 28 + 3 = 31$$

esto es $f[f^{-1}(31)] = f(14) = 31.$

En general, $f[f^{-1}(x)] = f\left[\dfrac{x-3}{2}\right] = 2\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + 3$

$$= (x-3) + 3 = x$$

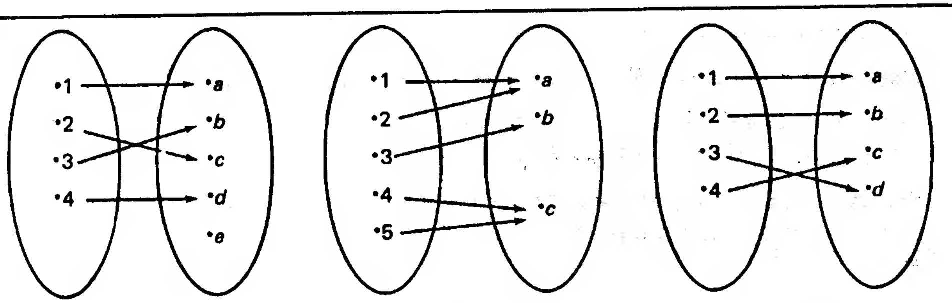
$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[2x+3] = \frac{2x+3-3}{2}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

10.9 Resumen

Recuerde que:

1. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
2. Una relación r de A en B es un subconjunto de $A \times B$ con dominio $r \subset A$ y rango $r \subset B$.
3. Una función f de A en B es una relación en la que para cada elemento $x \in A$, existe un único elemento $y \in B$ tal que $f(x) = y$, $D_f = A$ y rango de $f \subset B$.
4. Una función puede ser:



a) Inyectiva b) Sobreyectiva c) Biyectiva

5. Suma de funciones $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

   Diferencia de funciones $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

   Producto de funciones $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

   Cociente de funciones $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f\ (x)}{g\ (x)}$; $g(x) \neq 0$

   Composición de funciones:

   $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\quad$ f compuesto $g(x)$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\quad$ g compuesto $f(x)$

6. Si $y = f(x)$, entonces tenemos una función explícita en términos de x, ejemplo:

   $y = \sqrt{x + 1}$.

   Si $f(x, y) + M = 0$, con M constante entonces tenemos una función implícita.

   Ejemplo 22

   $x^2 + y^2 = r^2$

7. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se define el

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

8. La función parte entera se define como el mayor entero que es menor o igual a x y se denota por $y = [x]$.

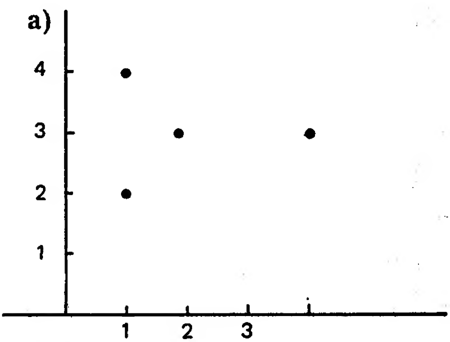
10.10 Ejercicios y problemas

1. Sean $A = \{-1, \pi, 0\}$ y $B = \{a, b, c\}$ verifique que $A \times B \neq B \times A$

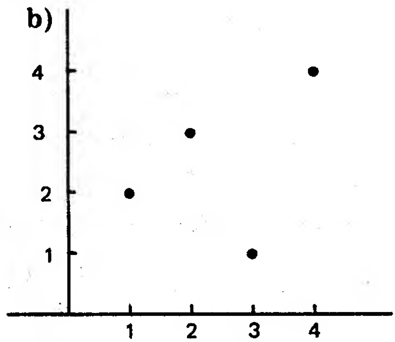
2. Dados los conjuntos $E = \{x \mid x$ es un número par$\}$ y $H = \{x \mid x > 0$ establezca la relación R "ser múltiplo de" de $E \to H$, determine el dominio y el rango de R_o, y haga el diagrama de R_o.

3. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$; determine cuáles de los siguientes diagramas corresponden a una función y en aquellos casos diga qué clase de función es.

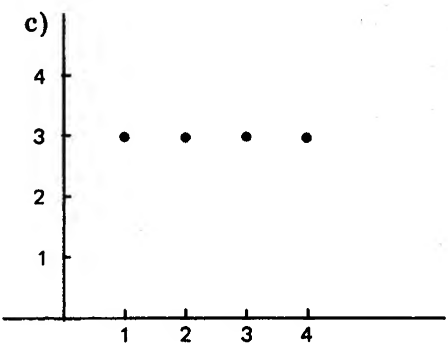
a)



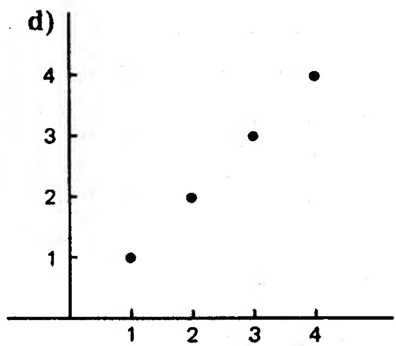
b)



c)



d)



4. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de pares ordenados define una función y en tales casos especifique el dominio y el rango.

a) $R_1 = \{(1, 2)\ (2, 1)\ (3, 2)\ (5, -1)\ (1, 3)\}$

b) $R_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 25\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in N \times N \mid y = x - 3\}$

d) $R_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right\}$

5. Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)(x-1)}$

b) $f(x) = |x^2| - 2$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$

d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

6. Grafique las siguientes funciones, estableciendo con anterioridad su dominio y su rango.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - 16$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

7. Realice la gráfica de las siguientes funciones para $x \in [-2, 3]$.

a) $\left[\dfrac{x}{2}\right]$

b) $[2x]$

c) $[x + 1]$

d) $[3x - 1]$

8. Calcule el determinante de las siguientes matrices, si es posible.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Referencias

Larson - Hostetler. *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.
Ceder Outcalt. *Cálculo.* Fondo Educativo Interamericano.
Hoffmann, Laurence. *Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales.* McGraw-Hill.

CAPITULO **11**

Funciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Manejar correctamente las propiedades de la función exponencial.
2. Resolver problemas de aplicación en modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial.
3. Utilizar las propiedades de la función logaritmo en la solución de ecuaciones.

11.1 Introducción

La invención de los logaritmos se debe al escocés John Neper (1550-1617) quien, sin exponer los métodos empleados para llegar a ellos, reveló su descubrimiento en su *Logarithmorum Canonis Descriptio* en 1614. Después de su muerte, su hijo publicó su *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructivo* (1620), en donde desarrolló los procedimientos empleados por su padre.

John Neper llegó al descubrimiento de los logaritmos, buscando un método que le permitiera simplificar algunos cálculos numéricos. Colaboró con Henry Briggs (1561-1631), matemático inglés, en la realización de las primeras tablas de logaritmos (llamados vulgares o de Briggs, y cuya base es el número 10), y que contenían los logaritmos de los números entre 1 y 20,000.

El logaritmo, como se verá, es la función inversa de la función exponencial, la cual se emplea en la solución de muchos problemas de aplicación conocidos con el nombre de problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial. En este capítulo nos ocuparemos principalmente de dichas aplicaciones.

11.2 Función exponencial

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y x en los reales.

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y su rango el conjunto de los reales positivos.

Para tener una idea de la gráfica de la función exponencial, consideremos el caso en que $a = 2$.

$f(x) = 2^x$, tabulando obtenemos

x	-6	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	0.015	0.25	0.5	1	1.41	2	4	8

La gráfica de la función $y = 2^x$ aparece en la Figura 11.1

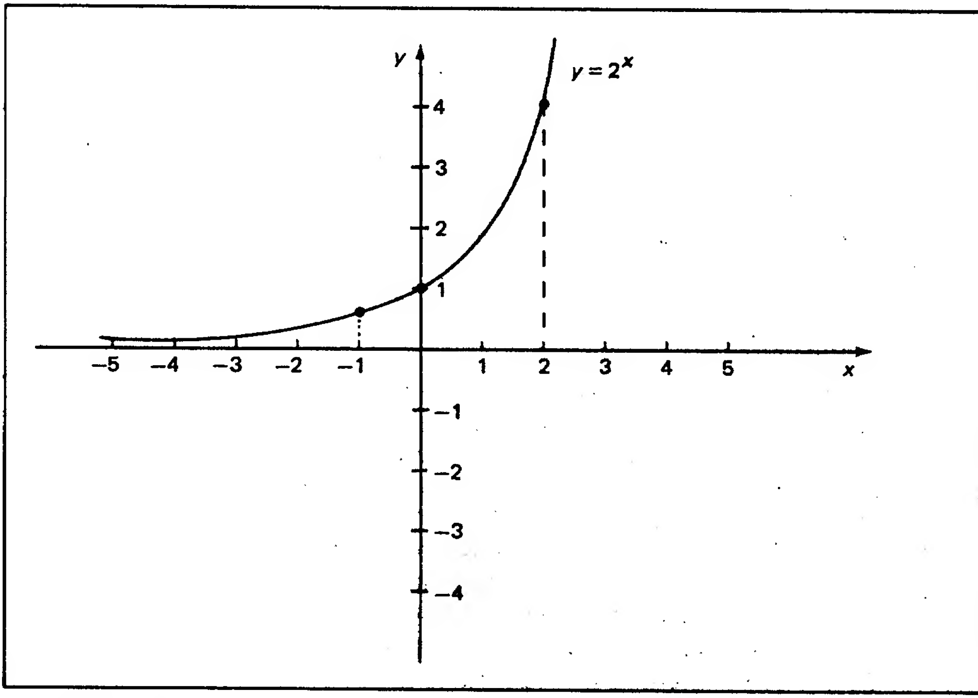


Figura 11.1 Función $y = 2^x$.

Esta gráfica, cuyo comportamiento es similar para cualquier valor de a positivo, tiene tres características importantes:

— Es asintótica en el eje X
— Es creciente para todo valor de x.
— Corta al eje Y en 1.

Propiedades

Algunas de las propiedades de la función exponencial se muestran en los siguientes teoremas:

Teorema 1

Si $a > 0$, $b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

a) $a^x a^y = a^{x+y}$

b) $(a^x)^y = a^{xy}$

c) $(a \cdot b)^x = a^x b^x$

Las anteriores propiedades se ilustraron mediante ejemplos en el Capítulo 5.

Teorema 2

a) Si $a > 1$, $\begin{cases} a^x > 1 \text{ para } x > 0 \\ a^x < 1 \text{ para } x < 0 \end{cases}$

b) Si $a < 1$, $\begin{cases} a^x < 1 \text{ para } x > 0 \\ a^x > 1 \text{ para } x < 0 \end{cases}$

c) Si $a = 1$; $a^x = 1$ para todo x.

Véase Figura 11.2.

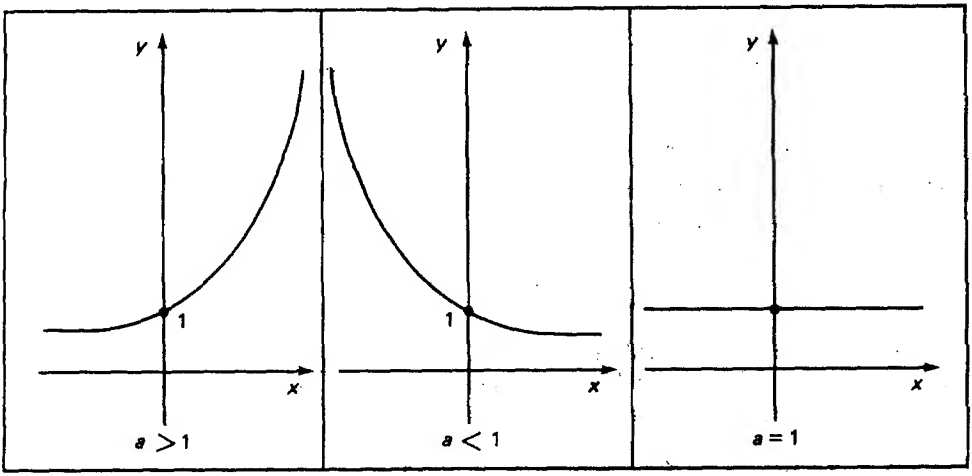


Figura 11.2 $y = a^x$.

Una consecuencia del Teorema 2 es la siguiente:

si $a > 1$, entonces la función es creciente;
si $a < 1$, entonces la función es decreciente.

Un caso particular de las funciones exponenciales es la función $f(x) = e^x$ [24] llamada comúnmente función exponencial, debido a su importancia. Como $e > 1$, entonces por el Teorema 2 la gráfica de la función $f(x) = e^x$ es creciente, como se muestra en la Figura 11.3.

Ejemplo de aplicación 1

Se depositan \$10,000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 24% anual. Si el interés se capitaliza sólo una vez al año, el saldo total al final del año será de:

---

[24] e representa al número irracional 2.718281..., base de los logaritmos naturales.

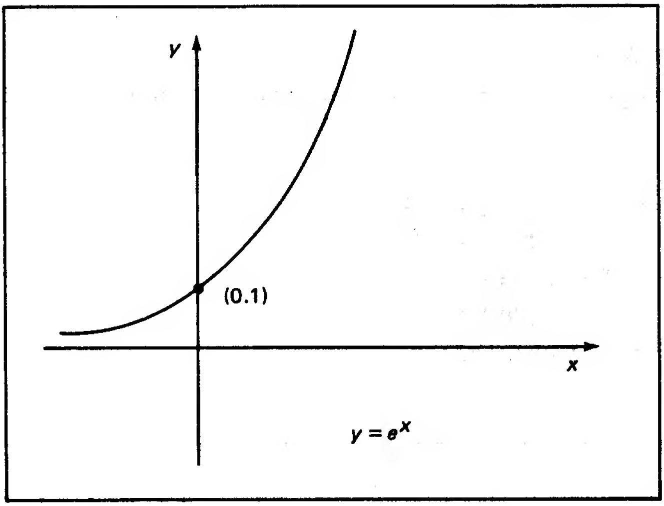


Figura 11.3 $y = e^x$

$$C_t = 10{,}000 + 0.24(10{,}000) = 12{,}400$$

Esto es, si C pesos se invierten a una tasa del $r\%$ anual, al final del primer añ se tiene un saldo total de:

$$C_t = c + \frac{cr}{100} = c\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Si el interés se capitaliza 2 veces al año, el interés pagadero semestral mente será del 12%, pero los intereses del primer semestre ganaron a su ve intereses en el segundo semestre, por tanto el saldo al finalizar el año será

$$C_t = 10{,}000 + \frac{0.24}{2}\ (10{,}000) + \frac{0.24}{2}\left[10{,}000 + \frac{0.24}{2}\left(10{,}000\right)\right] =$$

Primer semestre Segundo semestre

$$11{,}200 + 0.12(11{,}200) = 11{,}200 + 1344 = 12{,}544$$

reescribiendo C_t obtenemos:

$$\left[10{,}000 + \frac{0.24}{2}\left(10{,}000\right)\right]\left[1 + \frac{0.24}{2}\right]$$

$$10{,}000\left[1 + \frac{0.24}{2}\right]\left[1 + \frac{0.24}{2}\right] = 10{,}000\left(1 + \frac{0.24}{2}\right)^2$$

esto es,

$$C_t = c\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^2$$

Si el interés se pagara cuatro veces al año (trimestralmente), el saldo al final zar el año será:

$$C_t = 10{,}000 \left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^4$$

La generalización de lo anterior nos permite concluir que para cualquier capital C, a una tasa de interés del $r\%$ anual, capitalizado n veces al año, origina un saldo final igual a:

$$\boxed{C_t = C\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^n}$$

Así, un capital inicial de \$150,000 colocado a un interés del 18% anual capitalizado mensualmente, generará al término del año:

$$\$150{,}000 \left(1 + \frac{18}{100(12)}\right)^{12} =$$

$$\$150{,}000 \ (1.015)^{12} =$$

$$\$150{,}000 \ (1.19562) = \$179{,}343$$

Al transcurrir t años, el saldo final obtenido es:

$$\boxed{C_t = C\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^{tn}}$$

Así, los \$150,000 invertidos al 18% anual capitalizados trimestralmente, producirán al cabo de cinco años:

$$C_t = 150{,}000 \left(1 + \frac{18}{100(4)}\right)^{(5)(4)}$$

$$C_t = 150{,}000 \ (1 + 0.045)^{20}$$

$$C_t = 361{,}757.10$$

Si el interés se capitalizara continuamente, el saldo total al final del año vendría dado por la expresión.

$C_t = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)^n$. Si hacemos $k = 100\dfrac{n}{r}$

La expresión anterior se transforma en:

$$C_t = C \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{rk}{100}} =$$

$$C\left[\lim_{k \to \infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\frac{r}{100}}$$ [25]

luego el capital final obtenido al depositar C pesos invertidos al $r\%$ anual capitalizados continuamente viene dado por:

$$C_t = C\ e^{\frac{r}{100}}$$

Así, los \$150,000 invertidos al 18% anual, capitalizados continuamente se convertirán en:

$$C_t = 150{,}000\ (e)^{\frac{18}{100}}$$

$$150{,}000\ (1.19722) = 179{,}583$$

Al cabo de t años de capitalizar el interés continuamente, el saldo total al invertir C pesos al $r\%$: es:

$$C_t = Ce^{\frac{r}{100}t}$$

En el ejemplo que estábamos considerando, al cabo de 5 años de capitalizar continuamente, el capital total obtenido es,

$$C_t = 150{,}000\ (e)^{\frac{18}{100}(5)}$$

$$C_t = 368{,}940.46$$

Ejemplo de aplicación 2

Otro caso práctico en el que las funciones de tipo exponencial desempeñan un papel importante es el siguiente:

Consideremos un cultivo de bacterias con una población inicial de 100,000, que crece a una tasa del 16% cada hora. Al cabo de la primera hora la población total será:

$$P_t = 100{,}000 + 100{,}000 \cdot \frac{16}{100} = 100{,}000\left(1 + \frac{16}{100}\right)$$

$$P_t = 116{,}000$$

Esto es, una población de P individuos que crece a una tasa del $r\%$ en un tiempo t, (horas, meses, años, etc.) tiene al cabo del primer período de tiempo una población de:

$$P_t = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

[25] En capítulos posteriores mostraremos que $\lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e.$

En la segunda hora, la población total será:

$$P_t = 100{,}000\left(1+\frac{16}{100}\right)+\left(\frac{16}{100}\right)\left[100{,}000\left(1+\frac{16}{100}\right)\right]$$

$$P_t = 100{,}000\left(1+\frac{16}{100}\right)\left(1+\frac{16}{100}\right)$$

$$P_t = 100{,}000\left(1+\frac{16}{100}\right)^2$$

Por lo que al cabo de n horas, la población total será:

$$P_t = 100{,}000\left(1+\frac{16}{100}\right)^n$$

luego, al cabo de n períodos de tiempo, una población de p individuos, que crece a una rata de $r\,\%$, se convertirá en:

$$P_t = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

En general, podemos decir que una cantidad Q que crece de acuerdo a una ley de la forma

$$Q(t) = Q_0\, a^{kt}$$

experimenta un crecimiento exponencial, en este caso, Q_0 representa la cantidad inicial, a es la base de la función exponencial y k es una constante positiva. Como vimos un capital colocado a un interés con una determinada capitalización al crecimiento de ciertas poblaciones, son ejemplos de funciones exponenciales. Por el contrario, una función de la forma

$$Q(t) = Q_0\, a^{-kt}$$

representa un decrecimiento exponencial. Ejemplos de esta situación tienen que ver con depreciación de maquinaria, desintegración de sustancias radiactivas, etc.

Ejemplo 1

Cierta máquina se deprecia de tal forma que su valor después de t años viene dada por:

$$V(t) = 1{,}400{,}000\, e^{-0.03t}$$

¿Cuál es el valor de dicha máquina después de 5 años?

Solución:

Para $t = 5$

$$V(5) = 1{,}400{,}000\, e^{-0.03(5)}$$

$$V(5) = 1{,}400{,}000\,(0.8607)$$

$$V(5) \doteq 1{,}213{,}800$$

11.3 La función logaritmo

Un teorema de cálculo (muy avanzado para el texto) establece que si un función es continua y siempre creciente (o siempre decreciente) entonce tiene inversa. Por las gráficas de las Figuras 11.1 y 11.2 es claro que $f(x) = a$ satisface las condiciones necesarias para tener su respectiva función inver sa. Esta función inversa se denomina función logaritmo y se define de l siguiente manera:

Definición: Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\log_a x = b$ si, y solamente si, $a^b = x$.
$\log_a x = b$ "se lee" logaritmo en base a de x igual a b.

Si $f(x) = e^x$, esta función tiene también una inversa denominada funció logaritmo natural que se representa por $ln\ x$, así:

$$e^{ln\,x} = x, \text{ si } x > 0$$

$$ln\, e^x = x \quad \forall x$$

El gráfico de la función $f(x) = ln\ x$ se muestra en la Figura 11.4.

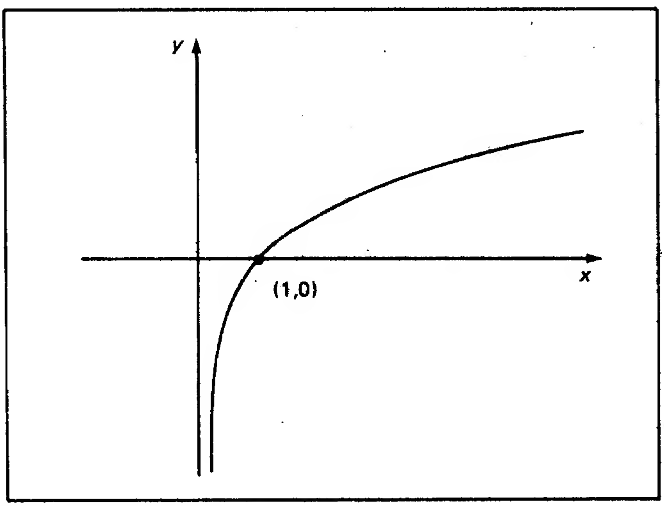


Figura 11.4 Función logaritmo natural.

Como se observa en la figura anterior la función logaritmo natural es siempr creciente, corta al eje X en 1, tiene como dominio el conjunto de los reale positivos y como codominio los números reales, y es tal que $ln\ e = 1$.

Una forma de obtener este gráfico es "reflejando" sobre la recta $y = x$ l función exponencial, tal como se indicó que se obtenía la inversa de una fun ción, *véase* Figura 11.5.

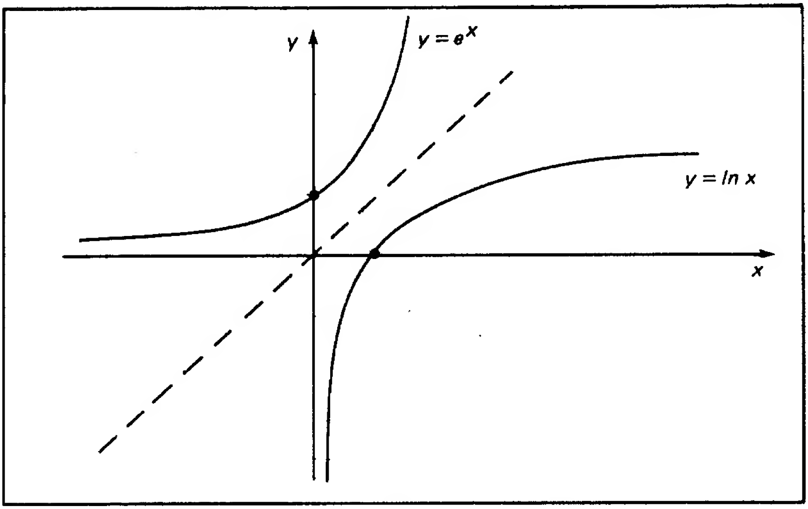


Figura 11.5 $y = \ln x$, inversa de $y = e^x$.

11.4 Propiedades de los logaritmos

La función logaritmo cumple, entre otras, las siguientes propiedades, las cuales facilitan el trabajo, transformando ciertas operaciones en otras más simples:

1. El logaritmo de un producto:

$$\boxed{\ln (a \cdot b) = \ln a + \ln b}$$

2. El logaritmo de un cociente:

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

3. El logaritmo de una potencia:

$$\boxed{\ln a^x = x \ln a}$$

4. El logaritmo de una raíz:

$$\boxed{\ln \sqrt[n]{a} = \left(\frac{1}{n}\right) \ln a}$$

5. Cambio de base:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$ [26]

Las propiedades 1 y 2 transforman productos y cocientes en sumas y restas respectivamente. La Propiedad 3 expresa que el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base. Hacemos notar que esta propiedad se aplica cuando el exponente corresponde a la variable. Esto se ilustra a continuación:

$$\boxed{[\ln x]^n = \ln^n x \neq n \ln x}$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación:

$$8^x = 15$$

Esta ecuación es exponencial, ya que la incógnita aparece en el exponente. Aplicando logaritmo a ambos lados, se tiene:

$$\ln 8^x = \ln 15$$

$$x \ln 8 = \ln 15 \text{ (por Propiedad 3)}$$

$$x = \frac{\ln 15}{\ln 8}$$

$$x = \frac{2.70805020}{2.079441542}$$

$$x = 1.30229$$

Ejemplo 3

Una población inicial p_0 está creciendo de tal forma que al cabo de un tiempo t, en horas, $3\,p_0 = p_0\ e^{+0.04\,t}$. Hallar t.

Para solucionar la anterior ecuación, dividimos ambos miembros de la igualdad entre p_0, así:

$$\frac{3p_0}{p_0} = \frac{p_0\, e^{0.04\,t}}{p_0}$$

$$3 = e^{0.04\,t}$$

[26] Aunque las propiedades están enunciadas para logaritmos naturales, éstas se cumplen para los logaritmos en cualquier base.

Aplicando logaritmo en ambos miembros se tiene,

$$ln\ 3 = ln\left[e^{0.04t}\right]$$

$$ln\ 3 = 0.04t\ \ ln\ e$$

$$ln\ 3 = 0.04t$$

$$\frac{ln 3}{0.04} = t \qquad t = 27.46 \text{ horas}$$

Otras aplicaciones de la función logaritmo se verán en capítulos posteriores, más exactamente en el capítulo de aplicaciones de las derivadas: derivación logarítmica.

11.5 Resumen

Recuerde que:

1. Una función exponencial es una función de la forma

   $f(x) = a^x$; con $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$

2. Un caso particular de la función exponencial es la función $f(x) = e^x$ donde e representa al número irracional 2.718281... y es la base de los logaritmos naturales.

3. $C_t = C\left(1 + \dfrac{r}{100n}\right)^{tn}$

   donde

   C : capital
   r : interés anual
   n : número de veces al año que se capitaliza el interés
   t : número de años

4. $Q(t) = Q_0\ a^{kt}$
   donde
   Q_0 : cantidad inicial
   a : base de la función exponencial
   k : constante positiva
   t : número de años

5. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

   $\log_a x = b$ si, y solamente si, $a^b = x$

6. $y = ln\ x$ inversa de $y = e^x$

7. Las propiedades de los logaritmos son:

   $ln\ (a \cdot b) = ln\ a + ln\ b$

   $ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = ln\ a - ln\ b$

   $ln\ a^x = x\ ln\ a$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \left(\frac{1}{n}\right) \ln a$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\ln^n x \neq n \ln x$$

11.6 Ejercicios y problemas

1. Utilice la calculadora y encuentre: e, e^0, e^3, e^{-2}, $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{e}}$, e^{-4}.
2. Dibuje las curvas $y = 3^x$ e $y = 5^x$ en el mismo plano.
3. Dibuje la gráfica de $y = 2^{-x}$ y compárela con la gráfica de $y = 2^x$.
4. Realice las gráficas de:
   a) $y = 10 + e^x$
   b) $y = e^x - 5$
   c) $y = 3e^x$
   d) $y = -5e^x$
   e) $y = e^{-x}$
   f) $y = e^{2x}$
   g) $y = e^{\frac{x}{3}}$
5. Una suma de dinero se invierte a un cierto tipo de interés. Después de 15 años el dinero se ha triplicado. Cuál será el saldo al final a los 20 años, si el interés
   a) se capitaliza semestralmente
   b) se capitaliza continuamente.
6. Cuando un banco ofrece un tipo anual de interés del $r\%$ y compone el interés más de una vez al año, el interés total ganado durante el año es mayor que el $r\%$ del saldo al principio del año. El porcentaje anual en el que crece el saldo durante un año se suele llamar tipo efectivo de interés, mientras que el tipo enunciado del $r\%$ se conoce como tipo nominal de interés. Halle el tipo efectivo de interés si el tipo nominal es del 6% y el interés se compone:
   a) trimestralmente
   b) continuamente
7. Está previsto que dentro de t años la población de cierto país será de $P(t) = 50\, e^{0.02t}$ millones.
   a) ¿Cuál es la población actual del país?
   b) ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

8. ¿Cuánto dinero debe ser invertido hoy a un tipo anual del 7% compuesto continuamente, para que dentro de 20 años su valor sea de $1,800,000 pesos?

9. El producto nacional bruto (PNB) de cierto país era de cien mil millones de pesos en 1975. Suponiendo que el PNB está creciendo exponencialmente, ¿cuál será el PNB en 1990?

10. La cantidad que queda de una muestra de una sustancia radiactiva después de t años viene dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0 e^{-0.001t}$. Al final de 5000 años quedan 2000 gramos de sustancia. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

11. Un estudio estadístico indica que la fracción de tostadores eléctricos fabricados por cierta compañía que están aún en condiciones de trabajo después de t años de uso, es aproximadamente de $f(t) = e^{-0.2t}$.

    a) ¿Qué fracción de tostadores puede esperarse que trabajen al cabo de tres años?

    b) ¿Qué fracción de tostadores puede esperarse que se descompongan durante el tercer año de uso?

    c) ¿Qué fracción de tostadores puede esperarse que se descompongan antes de un año de uso?

12. Una vez que la publicidad inicial acerca de la aparición de un nuevo libro ha terminado, las ventas de la edición de cubierta dura tienden a decrecer exponencialmente. En el momento en que la publicidad fue interrumpida, cierto libro estaba experimentando ventas de 25,000 ejemplares por mes. Un mes después, las ventas del libro habían descendido a 10,000 por mes. ¿Cuál será la venta después de un mes más?

13. La producción diaria de un empleado que ha estado en el trabajo t semanas viene dada por una función de la forma $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Inicialmente producía 20 unidades por día, y después de una semana puede producir 30 unidades diarias. ¿Cuántas unidades producirá por día después de 3 semanas?

14. Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de una rara forma de gripe, aproximadamente $f(t) = \dfrac{6}{3 + 9e^{-0.8t}}$ miles de personas han adquirido la enfermedad.

    a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad inicialmente?

    b) Cuántos habían adquirido la enfermedad pasadas tres semanas?

    c) Si la tendencia continúa, ¿cuántas personas en total contraerán la enfermedad?

15. Se estima que al cabo de t años, la población de cierto país será de $P(t) = \dfrac{80}{8 + 12\,e^{-0.06t}}$ millones.

    a) ¿Cuál es la población actual?

b) ¿Cuál será la población al cabo de 50 años?

c) ¿Qué le sucederá a la población con el paso de los años?

16. Una epidemia se propaga a través de una comunidad de forma que t semanas después de su brote, el número de personas que han sido infectadas viene dado por una función de la forma

$f(t) = \dfrac{B}{1 + C\,e^{-kt}}$, donde B es el número de miembros de la comunidad que son susceptibles a la enfermedad. Si $\dfrac{1}{5}$ de los individuos susceptibles estaban infectados al final de la primera semana; y al final de la cuarta, $\dfrac{3}{5}$; ¿qué fracción de los residentes susceptibles habían sido infectados al final de la octava semana? Tome B = 2000.

17. Aprenda cómo usar su calculadora para hallar logaritmos naturales. En particular halle $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln e$, $\ln 5$, $\ln \dfrac{1}{5}$, y $\ln e^2$. ¿Qué sucede si trata de hallar $\ln 0$ ó $\ln -2$? ¿Por qué?

18. Calcule la expresión dada, sin usar tablas ni calculadora:

a) $\ln e^3$

b) $\ln \sqrt{e}$

c) $e^{\ln 5}$

d) $e^{2 \ln 3}$

e) $e^{3 \ln 2 - 2 \ln 5}$

f) $\ln \left(\left(e^3 \sqrt{e}\right) e^{\frac{1}{3}}\right)$

19. Resuelva en x la ecuación dada:

a) $2 = e^{0.06x}$

b) $\dfrac{Q_0}{2} = Q_0\, e^{-1.2x}$

c) $3 = 2 + 5\, e^{-4r}$

d) $-2 \ln x = b$

e) $-\ln x = \dfrac{t}{50} + C$

f) $5 = 3 \ln x - \dfrac{1}{2} \ln x$

g) $\ln x = \dfrac{1}{3}(\ln 16 + 2 \ln 2)$

h) $\ln x = 2\,(\ln 3 - \ln 5)$

i) $3^x = e^2$

j) $a^k = e^{kx}$

k) $e^{x+1} = b$

l) $x^{\ln x} = e$

20. El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 10 años. El banco compone el interés continuamente. ¿Qué tipo anual de interés ofrece el banco?

21. Basados en la estimación de que hay diez mil millones de acres de tierra cultivable en nuestro planeta y que cada acre puede producir suficiente comida para alimentar a 4 personas, algunos demógrafos creen que la Tierra puede soportar una población de no más de cuarenta mil millones de personas. La población de la Tierra era aproximadamente de tres mil millones en 1960 y de cuatro mil millones en 1975. Si la población de la Tierra estaba creciendo exponencialmente, ¿cuándo alcanzaría la población el límite teórico de cuarenta mil millones?

22. La vida promedio de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en desintegrarse un 50% de una muestra de la sustancia.

 a) La cantidad restante después de t años de cierta sustancia radiactiva viene dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0 e^{-0.003t}$. Halle la vida promedio de la sustancia.

 b) El radio se desintegra exponencialmente. Su vida promedio es de 1690 años. ¿Cuánto tardará una muestra de 50 gramos de radio en reducirse a 5 gramos?

23. El matemático de una importante empresa editorial estima que si se distribuye x miles de ejemplares de regalo a los profesores, las ventas de un nuevo texto de matemáticas el primer año serán aproximadamente de $f(x) = 20 - 15\, e^{-0.2x}$ miles de ejemplares. De acuerdo con esta estimación, ¿cuántos ejemplares debe enviar el editor para generar el primer año unas ventas de 12,000 ejemplares?

24. Un economista ha reunido los siguientes datos sobre el producto nacional bruto (PNB) de cierto país:

Año	1965	1975
PNB (en miles de millones)	100	180

Use esos datos para predecir el PNB en 1995 si el PNB está creciendo:

 a) linealmente

 b) exponencialmente.

Referencias

Hoffmann, Laurence D. *Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales.* McGraw-Hill.

Swokowski. *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* Iberoamérica.

Larson-Hostetler. *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.

CAPITULO 12

La derivada

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Resolver problemas que involucren el concepto de tasa de cambio.
2. Calcular el límite y verificar la continuidad de funciones.
3. Aplicar las reglas del álgebra de derivadas para calcular la derivada de cualquier tipo de función.
4. Aplicar el concepto de derivada a la solución de problemas.

12.1 Introducción

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), filósofo y matemático alemán, e Isaac Newton (1642 - 1727), físico, matemático y astrónomo inglés, son considerados los pioneros de las ideas básicas del cálculo diferencial. Leibniz, quien trabajó en diversas ramas del saber, realizó su obra más importante en el desarrollo del cálculo infinitesimal (1676), cuyos conceptos fundamentales expuso en *Nuevo método para la determinación de los máximos y de los mínimos*. A Leibniz se debe el nombre de *cálculo diferencial* y la notación dy/dx. Trabajando en forma independiente y basado en el estudio del movimiento, Newton llegó al concepto de derivación.

La idea central del cálculo diferencial es la derivada, que puede considerarse como una de las herramientas más poderosas de la matemática. En este capítulo veremos el concepto de derivada, sus propiedades y algunas de sus primeras aplicaciones.

12.2 Razón de cambio

Iniciaremos este capítulo definiendo lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición 1:

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2 un par de valores en el dominio de f, de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

a) El cambio en el valor de x, al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x, y se representa por Δx[27].

Así: $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$

b) El cambio en el valor de y, al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, y se representa por Δy.

Así: $\boxed{\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)}$

Ejemplo 1

La ecuación $c(x) = 50{,}000 + 1500x$ determina el costo al producir x unidades. ¿Cuál es el aumento en los costos al incrementar la producción de 700 a 900 unidades?

Solución:

$$\begin{aligned}\Delta c &= c(x_2) - c(x_1)\\ &= c(900) - c(700)\\ &= [50{,}000 + 1500\,(900)] - [50{,}000 + 1500\,(700)]\\ &= \$300{,}000\end{aligned}$$

El incremento en los costos es de \$300,000.

Ejemplo 2

La siguiente ecuación de demanda

$$40p = 5000 - 150x$$

relaciona el número de unidades vendidas, x, a un precio p.

Calcule el aumento en las ventas al incrementar el precio de \$50 a \$57,50

Solución:

Al escribir x como una función de p, obtenemos:

$$x(p) = \frac{5000 - 40p}{150}$$

Luego $\Delta x = x_2 - x_1$

$$= x(p_2) - x(p_1)$$

[27] La letra griega Δ (delta) representa en todos los textos de cálculo el incremento o cambio en una variable cualquiera: Δy: cambio en y.

$$= \frac{5000 - 40(57{,}50)}{150} - \frac{5000 - 40(50)}{150}$$

$$= 18 - 20 = -2$$

entonces $x = -2$

El incremento negativo significa que al aumentar el precio disminuye el número de unidades vendidas.

Si Δx representa un incremento cualquiera sobre x, entonces

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

Véase Figura 12.1

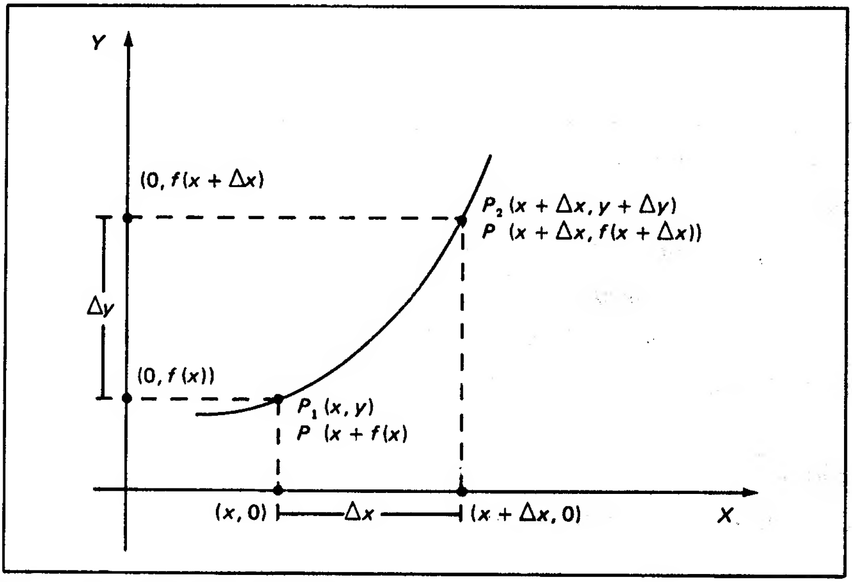


Figura 12.1 Incremento en x e incremento en y.

Ejemplo 3

En la siguiente ecuación de oferta

$$x(p) = (100 + p)^2 - 300p$$

calcule Δx, si el incremento en el precio es $\Delta p = \$10$, para $p = \$100$ y para $p = \$200$.

Solución:

$$x(p) = 10{,}000 + 200p + p^2 - 300p$$
$$x(p) = 10{,}000 + p^2 - 100p$$

como

$$\Delta x = x(p + \Delta p) - x(p), \text{ entonces}$$

$$\Delta x = [10{,}000 + (p + \Delta p)^2 - 100(p + \Delta p)] - [10{,}000 + p^2 - 100p]$$

$$\Delta x = (p + \Delta p)^2 - p^2 - 100\Delta p, \text{ luego}$$

para $p = \$100$

$$\Delta x = (100 + 10)^2 - (100)^2 - 100\,(10)$$

$$\Delta x = 12{,}100 - 10{,}000 - 1000$$

$$\Delta x = \$1100$$

para $p = \$200$

$$\Delta x = (200 + 10)^2 - (200)^2 - 100\,(10)$$

$$= 44{,}100 - 40{,}000 - 1000$$

$$\Delta = \$3100$$

Ejemplo 4

En la ecuación $p = 30{,}000 + 200x$, calcule el incremento sobre p, Δp, al realizar sobre x un incremento Δx.

Solución:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p(x + \Delta x) - p(x) \\ &= 30{,}000 + 200\,(x + \Delta x) - [30{,}000 + 200x] \\ &= 200x + 200\Delta x - 200x \end{aligned}$$

luego $\Delta p = 200\Delta x$

Ejemplo 5

En la siguiente ecuación de demanda

$$x(p) = \frac{3000}{p + 10}$$

calcule el aumento en las unidades vendidas, Δx, al realizar un incremento en el precio, Δp.

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(p + \Delta p) - x(p) \\ &= \frac{3000}{(p + \Delta p) + 10} - \frac{3000}{p + 10} \\ &= \frac{3000\,(p + 10) - 3000\,(p + \Delta p + 10)}{(p + \Delta p + 10)\,(p + 10)} \\ &= \frac{-3000\,\Delta p}{(p + \Delta p + 10)\,(p + 10)} \end{aligned}$$

Observe que si se realiza un incremento en los precios, en este caso se obtiene una disminución en el número de unidades vendidas.

Definición 2:

Sea $y = f(x)$ una función se define la *tasa de cambio* promedio[28] de f, entre x y $x + \Delta x$, al cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Por tanto la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observe que la definición de *tasa de cambio* coincide con la definición de pendiente entre dos puntos. En este caso, la tasa de cambio de f entre p_1 (x, y) y p_2 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, corresponde a la pendiente de la recta que une los puntos p_1 y p_2, *véase* Figura 12.2

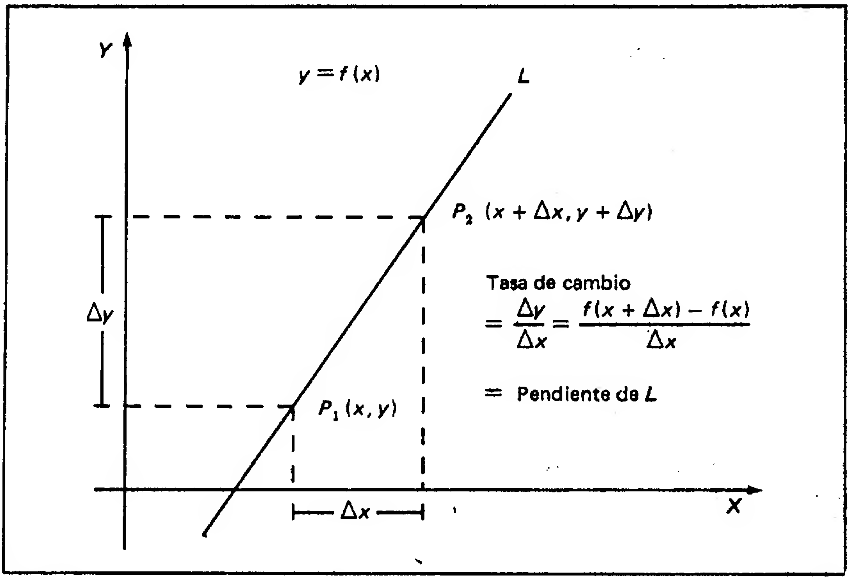


Figura 12.2 Pendiente y tasa de cambio.

Ejemplo 6

Considere la ecuación de la demanda del ejemplo 2, $40p = 5000 - 150x$. Calcule la tasa de cambio promedio del ingreso, al incrementar las unidades vendidas de 15 á 20.

[28] La tasa de cambio es también llamada razón de cambio, cociente de incrementos o cociente de diferencias.

Solución:

$$R = x \cdot p, \text{ luego}$$

$$R = x \cdot \frac{5000 - 150x}{40}$$

$$R(x) = \frac{5000x - 150x^2}{40}$$

$$R(x) = \frac{5000x - 150x^2}{40}, \text{ entonces}$$

la tasa de cambio promedio de R, es:

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x}$$

$$R = \frac{5000\,(x + \Delta x) - 150\,(x + \Delta x)^2}{40} - \frac{5000\,x - 150\,x^2}{40}$$

En nuestro caso, $x = 15$ y $\Delta x = 5$

luego $$\Delta R = \frac{5000(20) - 150(20)^2}{40} - \frac{5000(15) - 150(15)^2}{40}$$

$$\Delta R = \frac{100{,}000 - 60{,}000}{40} - \frac{75{,}000 - 33{,}750}{40}$$

$$\Delta R = \frac{40{,}000}{40} - \frac{41{,}250}{40} = 1000 - 1031.25$$

$$\Delta R = -31.25, \text{ por lo que}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = -\frac{31.25}{5} = -6.25$$

lo cual significa que por cada unidad incrementada, el ingreso disminuye e promedio \$6.25.

Ejemplo 7

La ecuación: $P = 1000 - \sqrt{x}$, determina una relación entre el precio y el nú mero de artículos que se venden en una fábrica, cuya ecuación de costos es

$$c(x) = 10{,}000{,}000 + 150x$$

Si la producción se incrementa de $x_1 = 40{,}000$ a $x_2 = 48{,}400$

a) ¿Cuál es el incremento en los costos?

b) ¿Cuál es el incremento en el ingreso $r(x)$?

c) ¿Cuál es el incremento en la utilidad?

d) ¿Cuáles son las respectivas tasas de cambio para el costo, el ingreso y la utilidad?

Solución:

En este caso $x = 40{,}000 \quad \Delta x = 8400 \quad x + \Delta x = 48{,}400$

a)
$$\Delta c = c(x + \Delta x) - c(x)$$
$$= 10{,}000{,}000 + 150\,(x + x) - [10{,}000{,}000 + 150x]$$
$$\Delta c = 150\ x, \text{ luego como } \Delta x = 8400$$
entonces $\Delta c = 150\,(8400) = \$1{,}260{,}000$

b)
$$R(x) = x \cdot p$$
$$R(x) = x(1000 - \sqrt{x})$$
$$R(x) = 1000\,x - x\,\sqrt{x}$$
$$\Delta R(x) = R(x + \Delta X) - R(x)$$
$$R(x + \Delta x) = 1000\,(x + \Delta x) - (x + \Delta x)\,\sqrt{x + \Delta x}$$
$$R(x + \Delta x) = 48{,}400{,}000 - 10{,}648{,}000$$
$$R(x + \Delta x) = 37{,}752{,}000$$
$$R(x) = 1000\,(40{,}000) - 40{,}000\,(200)$$
$$R(x) = 40{,}000{,}000 - 8{,}000{,}000 = 32{,}000{,}000$$
luego $\Delta R = 37{,}752{,}000 - 32{,}000{,}000$
$$\Delta R = \$5{,}752{,}000$$

c) Como $u(x) = R(x) - c(x)$, entonces
$$u(x) = (1000x - x\sqrt{x}) - (10{,}000{,}000 + 150x)$$
$$u(x) = 850x - x\sqrt{x} - 10{,}000{,}000$$
$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$
$$u(x + \Delta x) = 850\,(x + \Delta x) - (x + \Delta x)\sqrt{x + \Delta x} - 10{,}000{,}000$$
$$= 850\,(48{,}400) - (48{,}400)\,(220) - 10{,}000{,}000$$
$$= 41{,}140{,}000 - 10{,}648{,}000 - 10{,}000{,}000$$
$$u(x + \Delta x) = 20{,}492{,}000$$
$$u(x) = 850\,(40{,}000) - 40{,}000\,(200) - 10{,}000{,}000$$
$$u(x) = 16{,}000{,}000 \qquad \text{luego,}$$
$$\Delta u = 20{,}492{,}000 - 12{,}000{,}000$$
$$\Delta u = \$4{,}492{,}000$$

Observe que este incremento habría podido obtenerse así:

$$\Delta u = \Delta R - \Delta C$$
$$\Delta u = \$5{,}752{,}000 - \$1{,}260{,}000$$
$$\Delta u = \$4{,}492{,}000$$

d) Las respectivas tasas de cambio promedio son:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{1{,}260{,}000}{8400} = \$150$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{5{,}752{,}000}{8400} = \$684.76$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{4{,}492{,}000}{8400} = \$534.76$$

12.3 Límites

Consideremos la siguiente ecuación que permite encontrar la distanci recorrida por un móvil en un tiempo t.

$$x(t) = 100 + 50t - t^2$$

En este caso particular la razón de cambio promedio, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, se denomin velocidad media y la representaremos por $\overline{V}$, así:

$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{[100 + 50\,(t+\Delta t) - (t+\Delta t)^2\,]\,[100 + 50t - t^2\,]}{\Delta t}$$

$$= \frac{100 + 50t + 50\Delta t - t^2 - 2t\,\Delta t - (\Delta t)^2 - 100 - 50t +}{\Delta t}$$

$$= \frac{50\,\Delta t - 2t\,\Delta t - (\Delta t)^2}{\Delta t}$$

luego $\overline{V} = 50 - 2t - \Delta t$, si $\Delta t \neq 0$

En este caso, si $t = 20$ y

$\Delta t = 5$, $\overline{V} = 50 - 2(20) - 5$, $\overline{V} = 5$

$\Delta t = 1$, $\overline{V} = 50 - 2(20) - 1$, $\overline{V} = 9$

$\Delta t = 0.1$ $\overline{V} = 50 - 2(20) - 0.1$; $\overline{V} = 9.9$

$\Delta t = 0.01$ $\overline{V} = 50 - 2(20) - 0.01$; $\overline{V} = 9.99$

Entonces,

$$\overline{V} = 50 - 2t - \Delta t$$

se acerca al valor 10 a medida que Δt se acerca a cero, (recuerde que $\Delta t \neq 0$ por lo que decimos "el límite de $\overline{V}$ cuando Δt tiende a cero es 10", y lo r presentamos:

$$\boxed{\text{si } \Delta t \to 0, \text{ entonces } \overline{V} \to 10}$$

que también suele escribirse así:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \overline{V} = 10}$$

Este valor límite de la velocidad promedio se denomina velocidad instantánea, por lo que escribimos:

$$V\,(t = 20) = 10$$

que se interpretará como la velocidad del móvil en el instante $t = 20$

Observe que hemos obtenido el valor límite de $\overline{V}$ para cuando Δt se acerca a cero, y no el valor de $\overline{V}$ para cuando $\Delta t = 0$.

Lo anterior nos permite definir de manera informal el límite[29].

Definición 3:

Se dice que una función f tiende al límite L cerca de a, si $f(x)$ se acerca a L a medida que x se acerca a a, pero siendo $x \neq a$ y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si L existe, este valor es único.

Aunque en algunos casos el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a coincide con $f(a)$, en otros esto no se cumple necesariamente, ya que no siempre f está definida en a y sin embargo el límite existe (*véase* Figura 12.3).

[29] Formalmente podemos definir el límite de una función así: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L, si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\partial > 0$, tal que para todo x, si $0 < |x - a| < \partial$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

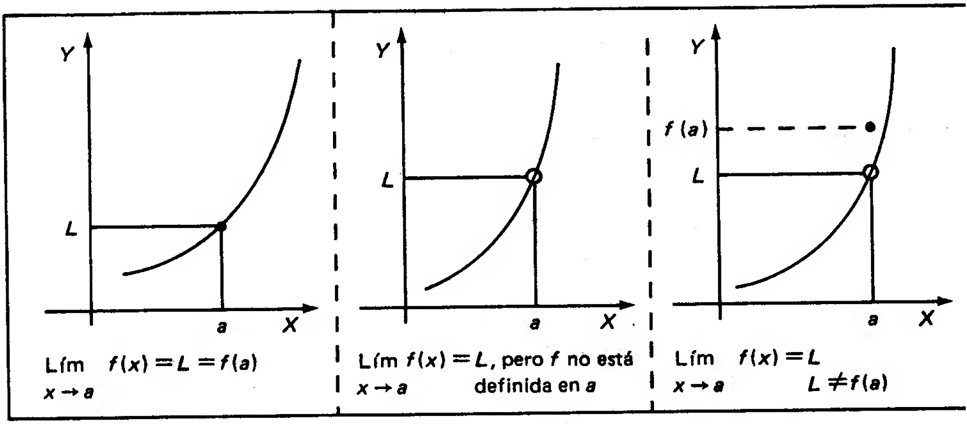


Figura 12.3 El $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Al observar la figura podemos diferenciar tres casos:

1. El límite de f en a coincide con el valor de $f(a)$. Esta situación permit evaluar el límite de algunas funciones en forma directa.

Ejemplo 8

Sea $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ halle el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

En este caso $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 2 = 12$

luego $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 12$

2. El límite de f en a existe; pero éste es diferente de $f(a)$ ya que f no es definida en a. En estos casos el procedimiento a seguir es transformar función dada en otra algebraicamente igual, definida en a, y después ca cular el límite como en el caso 1.

Ejemplo 9

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ calcule el $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Observe que f no está definida en $x = -1$; entonces debemos transfo mar $f(x)$ así:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1}$$

$$= x - 1 = g(x)$$

Luego $\underset{x \to -1}{\text{Lím}} f(x) = \underset{x \to +1}{\text{Lím}} (x-1) = g(-1) = -2$

por lo que $\underset{x \to -1}{\text{Lím}} f(x) = -2$

3. La función f está definida en a pero $f(a)$ es diferente de L.

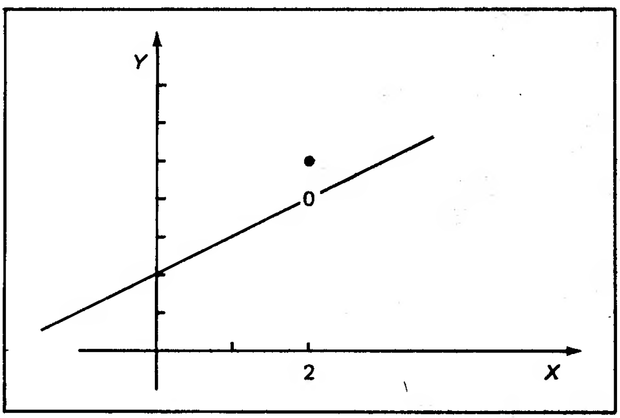
   El procedimiento a seguir es el mismo del caso anterior.

Ejemplo 10

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; \ \forall\, x \neq 2 \\ 5, \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Calcule $\underset{x \to 2}{\text{Lím}} f(x)$

La siguiente gráfica ilustra esta función que corresponde al caso tres de la Figura 12.3.



Tenga en cuenta que el límite de f en $x = 2$ no depende de $f(2)$. Para calcular el límite transformamos la función inicial así:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x+2 = g(x)$$

luego $\underset{x \to 2}{\text{Lím}} f(x) = \underset{x \to 2}{\text{Lím}} \; x+2 = g(2) = 4$

De los tres casos anteriores podemos concluir que para calcular el límite de una función basta con remplazar el valor de a en $f(x)$, siempre que ésto sea posible; en caso contrario, transformamos algebraicamente $f(x)$ en

una función $g(x)$, tal que $g(a)$ exista, y este valor $g(a)$ sea el límite de la función inicial.

Ejemplo 11

Calcule $\lim\limits_{x \to 3} (3x + 2)$

remplazando, se tiene $\lim\limits_{x \to 3} (3x + 2) = 3(3) + 2 = 11$

Ejemplo 12

Calcule $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

remplazando $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \dfrac{2(4)^2 - (4) - 3}{4 + 1} = \dfrac{25}{5} = 5$

Ejemplo 13

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$$

Como $f(0)$ no está definida entonces transformamos $f(x)$ (multiplicando por la conjugada) así:

$$\frac{(\sqrt{2 + x} - \sqrt{2})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2 + x})^2 - (\sqrt{2})^2}{x[\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}]} =$$

$$\frac{2 + x - 2}{x[\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}]} = \frac{x}{x[\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}]} = \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}} = g(x)$$

luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2}} = g(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ luego}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Observe que si remplazamos en $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$ valores de x cercanos a cero, obtenemos una expresión de la forma $\dfrac{0}{0}$ que representa el

cociente entre dos números diferentes cercanos a cero, que se conoce como una indeterminación[30].

Ejemplo 14

Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+2x-8}$$

Al remplazar se obtiene la expresión $\frac{0}{7}$, que no representa ninguna indeterminación ya que corresponde al cociente entre un número cada vez más cercano a cero y un número cercano a 7. La siguiente tabla nos muestra que este cociente tiende a cero.

2.8	2.9	2.95	2.99	3	3.01	3.05	3.1	3.2
−0.03676	−0.01610	−0.00757	−0.00144	?	0.00141	0.00675	0.0128	0.0231

Luego

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+2x-8} = \frac{0}{7} = 0$$

Ejemplo 15

Calcule

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4+2x+13}{[x+1]^2}$$

Al remplazar se obtiene la expresión $\frac{(-1)^4+2(-1)-3}{[1+(-1)]^2} = \frac{12}{0}$

que no representa ninguna indeterminación (recuerde que en el denominador no aparece realmente el cero), ya que corresponde al cociente entre un número cercano a 12 y un número que se acerca a cero. La siguiente tabla nos muestra que este cociente es cada vez más grande.

x	−1.2	−1.1	−1.05	−1.01	−1	−0.99	−0.95	−0.90	−0.80
$f(x)$	316.84	1226.41	4846.20	120206.04	?	119805.9	4765.8	1185.61	295.24

[30] La indeterminación en la expresión $\left(\frac{0}{0}\right)$ no se presenta por aparecer un cero en el denominador (de hecho no aparece), sino porque representa el cociente entre dos números diferentes cercanos a cero.

luego $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 + 2x + 13}{[1 + x]^2} = \dfrac{12}{0} = \infty$ [31]

Ejemplo 16

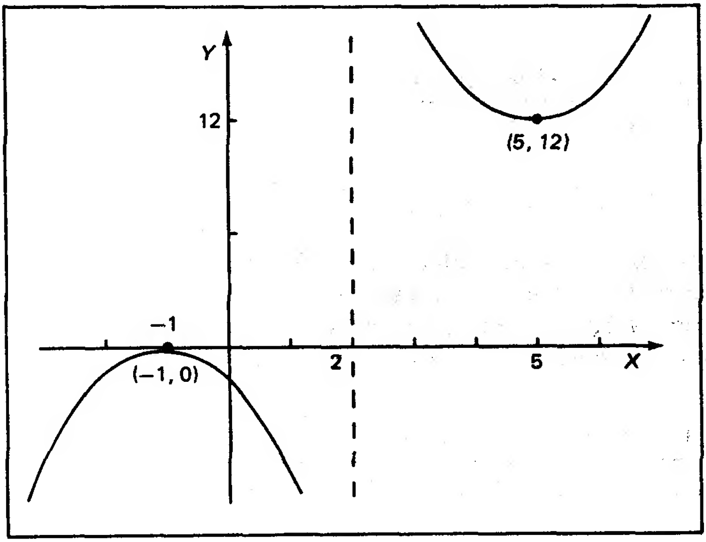
Calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}$$

Al remplazar obtenemos la expresión $\dfrac{9}{0}$, que no representa ninguna indeterminación como dijimos anteriormente; sin embargo un análisis de la tabla:

x	1.8	1.9	1.95	1.99	2	1.01	2.05	2.1	2.2
$f(x)$	−39.2	−84.1	−174.05	−894.01	?	906.01	186.05	96.1	51.2

nos permite concluir que cuando x se acerca a 2 $f(x)$ no tiende a un único valor (*véase* gráfica), por lo que concluimos que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}$ no existe.



[31] Recuerde que utilizamos el símbolo ∞ para representar una cantidad muy grande. Para algunos autores la existencia de un límite está sujeta al hecho de que éste sea finito, por tanto para ellos este límite no existe.

Una observación del gráfico anterior nos permite afirmar, sin embargo, que si x toma valores cercanos a 2 pero mayores que 2, $f(x)$ toma valores grandes y positivos y si toma valores cercanos a 2 pero menores que 2, $f(x)$ toma valores grandes pero negativos, situación que se presenta de la siguiente manera:

$$\text{Lím}_{x \to 2^+} \; f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \text{Lím}_{x \to 2^-} \; f(x) = -\infty$$

Expresiones que se leen respectivamente: límite cuando x tiende a 2 por la derecha de $f(x)$ igual a "más infinito" y límite cuando x tiende a 2 por la izquierda igual a "menos infinito". Los anteriores límites se denominan laterales y sirven para determinar cuándo existe el límite de una función, mediante el siguiente teorema:

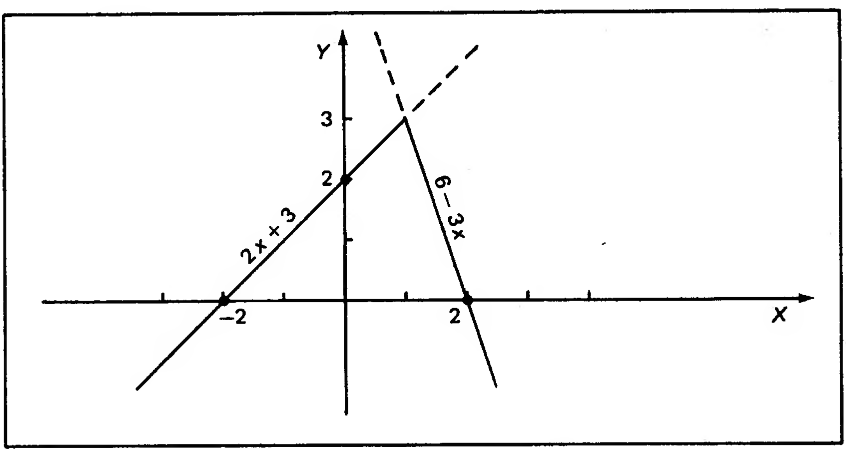
> **Teorema 1:** Sea $f(x)$ una función y a y L números reales, entonces $\text{Lím}_{x \to a} f(x) = L$ si y solamente si
>
> $$\text{Lím}_{x \to a^-} f(x) = \text{Lím}_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo 17

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \forall\, x \leqslant 1 \\ 6 - 3x; & \forall\, x > 1 \end{cases}$$

Calcule $\text{Lím}_{x \to 1} f(x)$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



Al observar la gráfica podemos afirmar que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

luego por el teorema anterior $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

En los anteriores ejemplos hemos utilizado algunas propiedades de lo límites. El siguiente teorema presenta sus propiedades básicas.

Teorema 2: Sean f y g dos funciones, tales que $\lim_{x \to a} f(a) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$, entonces:

1. Límite de una suma:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$$

2. Límite de un producto:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$$

3. Límite de un cociente:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(X)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

4. Si k es una constante, $\lim_{x \to a} k\, f(x)$

$$= K \lim_{x \to a} f(x) = K A$$

5. Si K es una constante, $\lim_{x \to a} k = k$

Ejemplo 18

Calcule $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \to 4} \left[\frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x\sqrt{x}} \right] = \frac{\lim_{x \to 4} (x^3 + 4x^2 - 1)}{\lim_{x \to 4} (x\sqrt{x})} =$$

$$\frac{\lim_{x \to 4} x^3 + 4 \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} 1}{\left(\lim_{x \to 4} x\right) \left(\lim_{x \to 4} \sqrt{x}\right)} = \frac{64 + 4\,(16) - 1}{(4) \cdot (2)} = \frac{127}{4}$$

El cálculo de un límite no exige el detalle de las propiedades, como en este ejercicio, sino que se puede evaluar directamente como en los ejemplos anteriores.

12.4 Continuidad

El concepto matemático de continuidad está bastante relacionado con el concepto no matemático del mismo. Se dice que una función f es continua en un punto $x = c$, si su gráfica no presenta ninguna interrupción en el punto c, es decir, decimos que f es continua si es posible recorrer la gráfica sin levantar el lápiz del papel.

En la Figura 12.4 se presentan tres diferentes opciones para una función discontinua.

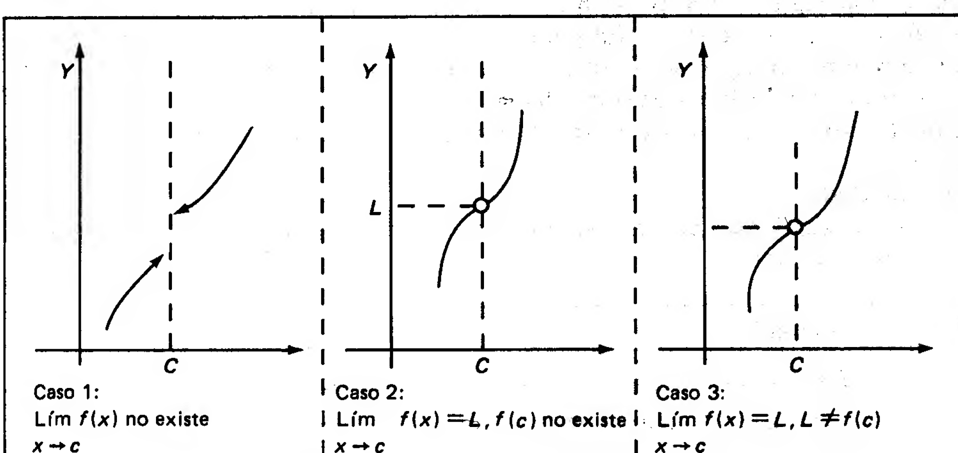


Figura 12.4 Diferentes discontinuidades para f.

En el Caso 1, el $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe, y se aprecia que f es discontinua en c.

En el Caso 2, el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, pero f no está definida en $x = c$.

En el Caso 3, el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, f está definida en $x = c$, pero el $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Lo anterior nos lleva a la siguiente definición:

Definición 4:

Se dice que una función f es continua en el punto $x = c$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. f está definida en $x = c$
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, y
3. $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

Definición 5:

Se dice que una función f es continua en el intervalo (a, b), si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Se dice que una función que no es continua es discontinua, pero algunas funciones discontinuas pueden volverse continuas. Las funciones de los casos 2 y 3 de la Figura 12.4, pueden volverse continuas; en cada uno basta con hacer $f(c) = L$, para que se cumplan las tres condiciones de continuidad. Una función con este tipo de discontinuidad, se llama discontinuidad evitable.

Como conclusión podemos decir que si f es discontinua en $x = c$, pero $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, entonces basta definir $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$ para remover la discontinuidad.

En los siguientes teoremas, se enumera una lista de las propiedades de las funciones continuas:

Teorema 3

Si f y g son funciones continuas en c, entonces:

1. $(f \pm g)$ es continua en c.
2. $(f \cdot g)$ es continua en c.
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ es continua en c, si $g(c) \neq 0$.
4. $(K g)$ es continua en c, para todo $K \in \mathbb{R}$.

Teorema 4

1. Si f es una función polinómica, entonces f es continua para todo x.

2. Si f es una función racional $f = \dfrac{g}{h}$, entonces f es continua para todo x de su dominio.

Ejemplo 19

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & , \forall x \neq -1 \\ 2 & , \text{si } x = -1 \end{cases}$

Analice la discontinuidad de f.

Para $x \neq -1$, la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ está definida para todo x y por el Teorema 4 es continua, luego necesitamos analizar la continuidad en $x = -1$.

En primer lugar debemos comprobar si $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ existe,

luego, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x - 3)(x + 1)}{x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} (x - 3) = -4$

como $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -4$, existe, pero es diferente de $f(-1) = 2$, entonces concluimos que f es discontinua en $x = -1$, pero que esta discontinuidad es evitable, y para remover la discontinuidad hacemos que $f(-1) = -4$.

Ejemplo 20

Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \geqslant 2 \\ x^2 - 1 & x < 2 \end{cases}$

Analice la discontinuidad de f en $x = 2$.

Como f está definida en dos formas diferentes, justo en el punto $x = 2$ debemos determinar el límite con base en los límites laterales. Luego,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$$

como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, entonces

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe. Entonces, podemos concluir que f es discontinua en $x = 2$ y que esta discontinuidad es inevitable.

12.5 La derivada

En el ejemplo 6 de la segunda sección de este capítulo, obtuvimos las tasas de cambio promedio para el costo, el ingreso y la utilidad calculados como:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} \quad , \quad \frac{\Delta R}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{respectivamente.}$$

De manera similar, calculamos la velocidad promedio $\overline{V}$ al iniciar la tercera sección, sólo que además, obtuvimos la velocidad instantánea al calcular el límite de $\overline{V}$ cuando $\Delta t \to 0$, así:

$$\underset{t \to 0}{\text{Lím}} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \overline{V} \text{ instantánea}$$

De manera similar habríamos podido calcular:

$\underset{x \to 0}{\text{Lím}} \dfrac{\Delta c}{\Delta x}$: tasa de cambio instantánea del costo.

$\underset{x \to 0}{\text{Lím}} \dfrac{\Delta R}{\Delta x}$: tasa de cambio instantánea del ingreso.

$\underset{a \to 0}{\text{Lím}} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$: tasa de cambio instantánea de la utilidad.

Todas estas tasas de cambio instantáneas son casos particulares de lo que se conoce en cálculo como la derivada de una función, que definimos a continuación:

Definición 6:

Sea $y = f(x)$ una función cualquiera. La derivada de f con respecto a x, $f'(x)$, se define como

$$f'(x) = \underset{x \to 0}{\text{Lím}} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre y cuando este límite exista. En este caso decimos que f es derivable en x, y $f'(x)$ representa la tasa de cambio instantánea de f con respecto a x.

$f'(x)$ también se representa por cualquiera de los siguientes símbolos:

$$y' \quad , \quad \frac{df}{dx} \quad , \quad \frac{dy}{dx} \quad , \quad DxF, DxY.$$

Ejemplo 21

Halle $f'(x)$, si $f(x) = x^2 + 2x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)] - [x^2 + 2x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 2 = 2x + 2,$$

luego $f'(x) = 2x + 2$

Ejemplo 22

Halle $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

en este caso,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{x+\Delta x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\;\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+\Delta x})^2}{\sqrt{x+\Delta x}\;\Delta x\;(\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}\;\Delta x\;(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+\Delta x}\;(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{-1}{\sqrt{x}\;(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{-2}{x\,(2\sqrt{x})} = \frac{-1}{x\sqrt{x}},$$

luego $f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x}}$

Las expresiones

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

reciben en Economía nombres especiales: costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal, respectivamente.

A continuación ampliaremos estos conceptos y los relacionaremos con otros ya vistos.

Definimos el costo total como la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$\boxed{C \text{ total: } C(x) = C \text{ fijos} + C \text{ variables}}$$

Se define el costo promedio, C, como el costo total dividido entre el número de unidades producidas, esto es:

$$\boxed{\text{Costo promedio: } C = \frac{c(x)}{x}}$$

Se define el costo marginal como el cambio en el costo total debido al incremento de una unidad en la producción, y se representa por $\frac{dc}{dx}$, esto es:

$$\boxed{\text{Costo marginal: } C'(x) = \frac{dc}{dx}}$$

Se interpreta como el costo extra unitario por cada unidad producida de más, cuando este incremento en el número de unidades es muy pequeño.

Definimos el ingreso R como el precio por unidad multiplicado por la cantidad de unidades demandadas, esto es,

$$\boxed{\text{Ingreso: } R(x) = x \cdot p}$$

De manera similar, el ingreso promedio R se define como el ingreso dividido entre el número de unidades demandadas, esto es,

$$\boxed{\text{Ingreso medio: } \overline{R} = \frac{x \cdot p}{x} = p}$$

El ingreso marginal se define como el cambio en el ingreso total debido a un incremento de una unidad en la demanda, y se representa por $\frac{dr}{dx}$, luego,

$$\boxed{\text{Ingreso marginal: } R'(x) = \frac{dR}{dx}}$$

Podemos interpretar el ingreso marginal, como el ingreso adicional por cada unidad demandada de más, cuando esta demanda adicional es muy pequeña.

Para la utilidad las ecuaciones son:

$$\boxed{U(x) = R(x) - C(x)}$$

$$\boxed{\text{Utilidad media: } \overline{U} = \frac{U(x)}{x}}$$

$$\boxed{\text{Utilidad marginal: } U'(x) = \frac{du}{dx}}$$

Son muchos más los conceptos marginales en el análisis económico: producción marginal, tasa marginal de sustitución, rendimiento marginal decreciente, producto físico marginal, productividad marginal, etc; pero en todos los casos su significado es el mismo: "la tasa a la cual está un total cambiando", y su forma de cálculo será $\frac{dy}{dx}$, en donde y representa la producción, el rendimiento, el producto físico, etc.

Ejemplo 23

La siguiente ecuación, $C(x) = 1{,}200{,}000 + 0.1x^2$, representa el costo para producir x unidades, que determinada fábrica vende según la siguiente ecuación de demanda:

$$x = 100{,}000 - 5p$$

a) ¿Cuál es el costo promedio de producir 10,000 unidades?

b) ¿Cuál es el incremento promedio en los costos si se pasa de 10,000 a 12,000 unidades producidas?

c) ¿Cuál es el costo marginal al producir 10,000 unidades?

d) ¿Cuál es el ingreso marginal al vender 10,000 unidades?

e) Al vender 10,000 unidades, ¿cuál es la utilidad promedio y cuál es la utilidad marginal?

Solución:

a) Costo promedio $\overline{C} = \dfrac{C(x)}{x}$, $x = 10{,}000$

$$\overline{C} = \frac{1{,}200{,}000 + 0.1(10{,}000)^2}{10{,}000}$$

$$\overline{C} = \$1120$$

b) $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$

$= c(12{,}000) - c\,(10{,}000)$

$= 1{,}200{,}000 + 0.1(12{,}000)^2 - [12{,}000{,}000 + 0.1\,(10{,}000)^2\,]$

$Ac = \$4{,}400{,}000$

El incremento es de $4,400,000

c) Costo marginal $C'(x) \quad = ?$

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x) - c(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1{,}200{,}000 + 0.1(x + \Delta x)^2 - [1{,}200{,}000 + 0.1\,x^2\,]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0.1\,(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 0.1\,x^2}{\Delta x}$$

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 0.1\,(2x + \Delta x)$$

$C'(x) = 0.2x\,,$ luego

$C'(10{,}000) = 0.2\,(10{,}000) = \$2000$

d) $R(x) = x \cdot p$

$$R(x) = x \quad \frac{(100{,}000 - x)}{5}$$

$R(x) = \dfrac{1}{5} \quad (100{,}000x - x^2\,)$, luego

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x}$$

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[20{,}000(x + \Delta x) - 0.2\,(x + \Delta x)^2\,] - [20{,}000x - 0.2x^2\,]}{\Delta x}$$

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20{,}000\Delta x - 0.2\,(2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (20{,}000 - 0.4x - 0.2\Delta x)$$

$$R'(x) = 20{,}000 - 0.4x, \text{ luego } \quad R'(x)\,(10{,}000) = 16{,}000$$

e) $U(X) = R(x) - c(x)$

$$U(x) = 20{,}000x - 0.2x^2 - [1{,}200{,}000 + 0.1x^2\,]$$

$$U(x) = 20{,}000x - 0.3x^2 - 1{,}200{,}000\,, \quad \text{luego}$$

$$\overline{U} = U(X)/x,$$

$$\overline{U} = \frac{20{,}000x - 0.3x^2 - 1{,}200{,}000}{x}$$

$$\overline{U}\,(10{,}000) = \frac{20{,}000(10{,}000) - 0.3(10{,}000)^2 - 1{,}200{,}000}{10{,}000}$$

$$\overline{U}\,(10{,}000) = \frac{168{,}800{,}000}{10{,}000} = \$16{,}880$$

es la utilidad promedio.

Utilidad marginal, $U'(x) = \ ?$

$$U'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x}$$

$$U'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[20{,}000(x + \Delta x) - 0.3(x + \Delta x)^2 - 1{,}200{,}000] - [20{,}000x - 03x^2 - 1{,}200{,}000]}{\Delta x}$$

$$U'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{20{,}000\Delta x - 0.6x\Delta x - 0.3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$U'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 20{,}000 - 0.6x - 0.3\Delta x$$

luego $U'(x) = 20{,}000 - 0.6x,$

por lo que $U'(10{,}000) = 20{,}000 - 0.6\,(10{,}000)$

$U'(10{,}000) = \$14{,}000$

12.6 Algebra de derivadas

Utilizar la definición para calcular la derivada de algunas funciones resulta muy dispendioso, por lo que es necesario conocer reglas que faciliten este

procedimiento. Estas reglas conforman lo que se denomina el álgebra de derivadas.

Derivada de la función potencia

La derivada de una función potencia $y = f(x) = ax^n$ es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[ax^n] = nax^{n-1} \text{ ó } f'(x) = nax^{n-1}} \qquad 12.1$$

Ejemplos:

1. $\frac{d}{dx}[3x^2] = 2 \times 3x^{2-1} = 6x^1 = 6x$

2. $\frac{d}{dx}\left[-5x^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(-5)x^{\left(\frac{1}{2}\right)-1} = -\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

3. $y = \frac{1}{2}x^{\frac{7}{5}} = \frac{dy}{dx} = \frac{7}{10}x^{\frac{2}{5}}$

Derivada de la función constante

La derivada de la función constante $y = f(x) = k$ es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[y] = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[k] = 0} \qquad 12.2$$

donde (12.2) se puede escribir en forma equivalente como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx} = f'(x) = 0$$

Puesto que la gráfica de una función constante es siempre una línea recta horizontal con pendiente cero, entonces la derivada (que mide la pendiente de una función (curva) en un punto) de una función constante debe ser cero. Por ejemplo, la derivada de cada una de las funciones constantes: $y = f(x) = a$, $y = f(x) = 12$, y $y = f(x) = -4$, es cero.

Derivada de la suma y diferencia

Si y es la suma (diferencia) de dos funciones, como $y = f(x) \pm g(x)$, entonces la derivada de esta suma (diferencia) es

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)] = f'(x) \pm g'(x)} \qquad 12.3$$

Asimismo, $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se puede escribir de nuevo como

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u + v] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}} \qquad 12.4$$

Ejemplos:

1. Si $y = 7x^{-2} + 3x^{\frac{1}{3}}$, con $u = f(x) = 7x^{-2}$ y $v = g(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[7x^{-2} + 3x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{d}{dx}[7x^{-2}] + \frac{d}{dx}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right] = -14x^{-3} + x^{-\frac{2}{3}}$$

2. Si $y = 15x^{\frac{1}{3}} - 2x^2$, con $u = f(x) = 15x^{\frac{1}{3}}$ y $v = g(x) = -2x^2$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[15x^{\frac{1}{3}} - 2x^2\right] = \frac{d}{dx}\left[15x^{\frac{1}{3}}\right] - \frac{d}{dx}[2x^2] = 5x^{-\frac{2}{3}} - 4x$$

3. $y = -2x^{-3} + 5x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-2} = \dfrac{dy}{dx} = 6x^{-4} + \dfrac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 8x^{-3}$

Derivada de un producto

Si y es el producto de dos funciones, por ejemplo de $y = f(x)\,g(x)$, entonces la derivada de este producto es

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)\,f'(x)} \qquad 12.5$$

Asimismo, tomando $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se puede escribir de nuevo como

$$\boxed{\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}} \qquad 12.6$$

Ejemplos:

1. Si $y = (2x^2 + 5x)(3x^3)$, con $u = f(x) = 2x^2 + 5x$ y $v = g(x) = 3x^3$, así que $\dfrac{du}{dx} = f'(x) = 4x + 5$ y $\dfrac{dv}{dx} = g'(x) = 9x^2$, entonces:

$$\frac{d}{dx}[(2x^2+5x)(3x^3)] = (2x^2+5x)(9x^2)+(3x^3)(4x+5) = 30x^4+60x^3$$

La regla del producto se puede extender al caso de tres funciones. Por ejemplo, tomando $w = h(x)$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}[uvw] = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uw\frac{du}{dx}} \qquad 12.7$$

2. $y = (3x^2+19)(6x^{-2}+x^3)$

Tomando $u = 3x^2+19$ y $v = 6x^{-2}+x^3$, tal que $\frac{du}{dx} = 6x$ y $\frac{dv}{dx} = -12x^{-3} + 3x^2$, entonces la derivada de y es:

$$\frac{d}{dx}[uv] = (3x^2+19)(-12x^{-3}+3x^2)+(6x^{-2}+x^3)(6x)$$
$$= 15x^4+57x^2-228x^{-3}$$

3. $y = (1+x)(2x)(3x^2)$

Tomando $u = 1+x$, $v = 2x$ y $w = 3x^2$, tal que $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{dv}{dx} = 2$ y $\frac{dw}{dx} = 6x$ entonces la derivada de y es:

$$\frac{d}{dx}[uvw] = (1+x)(2x)(6x)+(1+x)(3x^2)(2)+(2x)(3x^2)(1) = 24x^3+18x^2$$

Derivada de un cociente

Si y es el cociente de dos funciones, por ejemplo de $f(x)/g(x)$, entonces la derivada de este cociente es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}} \qquad 12.8$$

De igual manera, tomando $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se puede escribir de nuevo como

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}} \qquad 12.9$$

Ejemplos:

1. Si $y = \dfrac{(4x^2 + 3x)}{(2x + 1)}$, con $u = f(x) = 4x^2 + 3x$ y $v = g(x) = 2x + 1$

   tal que $\dfrac{du}{dx} = f'(x) = 8x + 3$ y $\dfrac{dv}{dx} = g'(x) = 2$, entonces

$$\frac{d}{dx} \quad \frac{4x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{(2x + 1)(8x + 3) - (4x^2 + 3x)(2)}{(2x + 1)^2} = \frac{8x^2 + 8x + 3}{(2x + 1)^2}$$

2. $y = \dfrac{x^3}{(x^2 + 7)}$

   Tomando $u = x^3$ y $v = x^2 + 7$, tal que $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$ y $\dfrac{dv}{dx} = 2x$, entonces la derivada de y es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(x^2 + 7)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2 + 7)^2} = \frac{x^4 + 21x^2}{(x^2 + 7)^2}$$

3. $y = \dfrac{(1 + x)}{(2x^2 + 1)}$

   Tomando $u = 1 + x$ y $v = 2x^2 + 1$, tal que $\dfrac{du}{dx} = 1$ y $\dfrac{dv}{dx} = 4x$, entonces la derivada de y es:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(2x^2 + 1)(1) - (1 + x)(4x)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{(2x^2 + 1)^2}$$

12.7 La regla de la cadena

La regla 12.1 para una potencia, se utiliza cuando la base sea x, como en $y = x^{\frac{1}{3}}$. En el caso de que la base sea una función que dependa de x, como en $y = (x^2 + 5x)^{\frac{1}{3}}$, la regla para la derivada de una potencia no es suficiente y entonces necesitamos utilizar lo que se conoce como la *regla de la cadena*.

> Regla de la cadena: Si y es una función que depende de u, $y = y(u)$, donde u es una función que a su vez depende de x, $u = u(x)$, entonces la derivada de y con respecto a x se calcula así:
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{o } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

12.10

Ejemplos:

1. Sea $y = 3u^2 + 2u - 1$ y $u = 3x + 4$

   Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (6u + 2)(3)$$
$$= 18u + 6$$
$$= 18(3x + 4) + 6$$
$$= 54x + 78$$

2. Sea $y = \sqrt[5]{(5x^2 + 7x - 1)^2}$, calcule y'. Expresamos y así antes de derivar.

$$y = (5x^2 + 7x - 1)^{\frac{2}{5}} \text{, entonces}$$

$$y' = \frac{2}{5}(5x^2 + 7x - 1)^{-\frac{3}{5}}(5x^2 + 7x - 1)'$$

$$= \frac{2}{5}(5x^2 + 7x - 1)^{-\frac{3}{5}}(10x + 7)$$

$$= \frac{2(10x + 7)}{5\sqrt[5]{(5x^2 + 7x - 1)^3}}$$

Nota: La expresión $(5x^2 + 7x - 1)'$ corresponde a lo que se denomina la derivada interna de una función.

3. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^3$, calcule y'

$$y = 3\left(\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right)'$$, observe que la derivada interna es un cociente,

luego debemos derivar como tal, así:

$$y = 3\left(\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^2 \left(\frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}\right)$$

12.8 Derivación implícita

Gran parte de las ecuaciones analizadas han sido expresadas en forma explícita, esto es, una de las dos variables estaba dada explícitamente en términos de la otra, como estudiamos en el Capítulo 10.

Ejemplos:

$C(x) = 1000 + 3x$

$S(t) = 4t^2 - 1$

Estas ecuaciones están expresadas en forma explícita.

Sin embargo no todas las funciones están expresadas en esta forma; algunas están escritas en forma implícita[32] como $x\,y = 1$.

Para calcular en esta última expresión $\dfrac{dy}{dx}$, podemos despejar "y" en función de "x" y derivar así:

$$y = \frac{1}{x}\text{, luego } \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

El método anterior sirve solamente cuando despejar "y" de la implícita sea fácil, pero, ¿cómo despejaremos "y" en la siguiente ecuación?

$$xy^2 + y^3 = 5 + x^3$$

Es claro que para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ necesitamos un procedimiento en el que no tengamos que despejar "y"; éste se denomina "*Derivación implícita*".

Así, los términos que son una función de x se derivan común y corriente y los términos que son una función de "y" se derivan utilizando la regla de la cadena:

Ejemplo 24

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

$$\frac{d(y^3)}{dx} = 3y^2 \quad \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(y^2 + 2x^3)}{dx} = 2y \quad \frac{dy}{dx} + 6x$$

Se asume que "y" es una función que depende de x.

Para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ en una función implícita se deriva en ambos miembros de la ecuación con respecto a x y se despeja $\dfrac{dy}{dx}$ de la expresión obtenida.

[32] *Véase* Capítulo 10.

Ejemplo 25

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en $xy^2 + y^3 = 5 + x^3$

Derivando con respecto a x se obtiene:

$$x \frac{d}{dx}(y^2) + y^2 \frac{d}{dx}(x) + d(dx(y^3)) = \frac{d}{dx}(5) + \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$x\,2y\frac{dy}{dx} + y^2(1) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 + 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}[2xy + 3y^2] = 3x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy + 3y^2}$$

Ejemplo 26

Calcule $\dfrac{dx}{dy}$ en $\sqrt{x+y} + 3x^2 = xy^2 + 1.$

Dividiendo con respecto a y se obtiene:

$$\frac{d}{dy}\left[(x+y)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{d}{dy}(3x^2) = \frac{d}{dy}(xy^2) + \frac{d}{dy}(1)$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dy} + 6x\frac{dx}{dy} = x\cdot 2y\frac{dy}{dy} + y^2\frac{dx}{dy} + 0$$

$$\frac{\dfrac{dx}{dy} + 1}{2\sqrt{x+y}} + 6x\frac{dx}{dy} = 2xy + y^2\frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy}\left[\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + 6x - y^2\right] = 2xy - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy - \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} + 6x - y^2}$$

La derivación implícita se utiliza también para calcular derivadas con respecto a una variable de la ecuación original. En este caso se supone que las variables de la ecuación dependen de dicha "variable ajena", y por tanto las derivadas se calculan por medio de la regla de la cadena.

Ejemplo 27

Sea $v = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$, calcule $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(v) = \frac{\pi}{3} \frac{d}{dt}(R^2 \cdot h)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[R^2 \frac{d(h)}{dt} + h \frac{d R^2}{dt}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[R^2 \frac{dh}{dt} + 2Rh \frac{dR}{dt}\right]$$

Ejemplo 28

Sea $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ el volumen de una esfera de radio R.

Calcule:

a) La variación del volumen con respecto al radio.

b) La variación del volumen con respecto al tiempo.

Solución:

a) $\frac{dv}{dR} = 4 \pi R^2$ (Observe que es una derivada de una función explícita).

b) $\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi \frac{d}{dt} R^3$

$$= \frac{4}{3} \pi\, 3R^2 \frac{dR}{dt}$$

$$= 4 \pi R^2 \frac{dR}{dt}$$

12.9 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

En el capítulo anterior se estudiaron las funciones exponencial y logarítmica, $y = e^x$ y $y = Ln\ x$. En esta sección trataremos la derivada de estas funciones y algunas de sus aplicaciones.

$$\boxed{\text{Si} \quad y = e^x, \quad \text{entonces } \frac{dy}{dx} = e^x} \qquad 12.11$$

Si $U = U(x)$, y $y = e^{u(x)}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{du}{dx} \qquad 12.12$$

Ejemplo 29

Sea $y = e^{2x+1}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x+1} \dfrac{d}{dx} (2x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = 2\, e^{2x+1}$$

Ejemplo 30

Sea $y = e^{-\sqrt{x}}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = e^{-\sqrt{x}} \cdot \dfrac{d}{dx} (-\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Si $y = Ln\, x$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ 12.13

Si $u = U(x)$ y $y = Ln\, u$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \qquad 12.14$$

Ejemplo 31

Sea $y = Ln\,(x+2)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+2)}$$

Ejemplo 32

Sea $y = Ln\,(x^3 + 2x - 1)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 + 2x - 1} \cdot (3x^2 + 2) = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}$$

12.10 Derivadas de orden superior

En el presente capítulo hemos obtenido la velocidad de un móvil, al derivar la ecuación $x(t)$ que daba la posición del mismo. Esta es entonces una definición de la velocidad como la derivada del espacio con respecto al tiempo $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.

De manera similar podemos obtener una ecuación para la aceleración, como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Esta segunda derivada es de orden superior. Podemos calcular derivadas de cualquier orden (entero positivo), con una regla similar a la anterior: la segunda derivada es la derivada de la primera derivada, la tercera derivada es la derivada de la segunda derivada, y así sucesivamente.

Las siguientes son las derivadas de orden superior y sus diferentes formas de anotación:

Primera derivada:	$y', f'(x)$,	$\dfrac{dy}{dx}$,	$\dfrac{df}{dx}$
Segunda derivada:	$y'', f''(x)$,	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,	$\dfrac{d}{dx}\ (y')$
Tercera derivada:	$y''', f'''(x)$,	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$,	$\dfrac{d}{dx}\ (y'')$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}, f^{(4)}(x)$,	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$,	$\dfrac{d}{dx}\ (y''')$
n-ésima derivada	$y^{(n)}, f^{(n)}(x)$,	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$,	$\dfrac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)$

12.11 Resumen

Recuerde que:

1. Sean $y = f(x)$ y y $\{x_1, x_2\} \in D_f$ tal que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$
   Se define incremento de x por $\Delta x = x_2 - x_1$ e incremento de y por $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

2. Tasa de cambio promedio se define como:

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3. Una función tiende al límite L, cerca de a, si $f(x)$ se acerca a L a medida que x se acerca a a, pero siendo $x \neq a$ y se escribe:

   $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

   Si L existe, este valor es único.

4. Sean f y g dos funciones, tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = B, \quad \text{entonces}$$

a) $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

b) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

c) $$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$$

d) Para k constante $\lim_{x \to a} kf(x) = \lim_{x \to a} k \lim_{x \to a} f(x)$

$$= k \lim_{x \to a} f(x) = K \cdot A$$

5. Se dice que una función f es continua en el punto $x = c$, si se cumple

a) f está definida en $x = c$

b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

c) $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

6. La derivada de una función se nota como $f'(x)$ y se define así:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

7. Costo marginal $= \dfrac{dc}{dx} = c'(x)$

Ingreso marginal $= \dfrac{dR}{dx} = R'(x)$

Utilidad marginal $= \dfrac{du}{dx} = U'(x)$

8. Algebra de derivadas

a) Derivada de una potencia

si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n\, x^{n-1}$

b) Derivada de una función constante

si $f(x) = k$, entonces $f'(x) = 0$

c) Derivada de la suma y diferencia

si $y = f(x) \pm g(x)$, entonces $y' = f'(x) \pm g'(x)$

d) Derivada de un producto

si $y = f(x) \cdot g(x)$, entonces $f(x)\ \ g'(x) + f'(x)\, g(x)$

e) Derivada de un cociente

si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $y' = \dfrac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$

9. Regla de la cadena

Si $y = y(u)$ y $U = u(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ o } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

10. Derivada de la función exponencial

si $y = e^x$, entonces $y' = e^x$

si $u = u(x)$ y $y = e^{u(x)}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = e^u \ \dfrac{du}{dx}$

11. Derivada de función logarítmica

si $y = ln\ x$, entonces $y' = \dfrac{1}{x}$

si $u = u(x)$ y $y = ln\ u$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u}\ \dfrac{du}{dx}$

12.12 Ejercicios y problemas

Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

i) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

k) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x|}{x}$

l) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{|x|}$

m) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{|x-7|}$

n) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

ñ) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{2x-1}$

2. Para cada caso encuentre $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 3 \\ 2x+3, & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 3 \\ x^3, & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & \text{si } x > 3 \\ 2x+1, & \text{si } x < 3 \end{cases}$

3. Utilizando la definición de derivada, calcule y' para cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{4x+1}$

b) $y = \sqrt{5 - x}$

c) $y = x^3 - 2$

4. Calcule la derivada de:

a) $y = x^5 - 4x^4 + \dfrac{3}{2x} - 1$

b) $y = x^6 - x + 2$

c) $y = [x^2 + 3x]\,[x^3 - 2x]$

d) $y = \dfrac{3x^4 - x^2 + 5x + \pi}{7}$

e) $y = \dfrac{10}{x}$

f) $y = \dfrac{(5x-1)^3}{15 - x^2}$

g) $y = (1 + \sqrt{x})\,x^3$

h) $y = 8 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{17}{x^4}$

i) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

j) $y = \dfrac{(x^3 + 1)(5 - \sqrt{x})}{x^2}$

k) $y = \dfrac{(x^2 + 2x + 3)(\sqrt{x})}{(x^3 + 5x + 2)}$

l) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

m) $y = \sqrt{3x^2 + 2x + 5}$

5. Calcule la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $y = e^{x^2}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \ln x^2$

c) $y = (3 + \ln x^3)\,e^{-2x}$

d) $y = \dfrac{1}{\ln (x^2 + 1)^3}$

e) $y = x^3 + \ln (1 + x^2)$

f) $y = (\ln x)^3$

g) $y = ln \left[\dfrac{\sqrt{2x+1}\ \sqrt[3]{3x+2}}{(x^2+1)^5} \right]$

6. Utilizando la derivación logarítmica calcule y':

a) $y = \sqrt{e^x \cdot ln\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

b) $y = 5^{x^2}$

c) $y = e^{ln\ x}$

d) $y = x^x$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}\ \sqrt[5]{2x^3+3x}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}$

7. Calcule la derivada de las siguientes funciones implícitas:

a) $x^2 - y^2 = 3$

b) $xy = 4x + 1$

c) $x^2y + xy^2 + 12 = \pi$

d) $2y^3 + 4xy + x^2 - 7 = 0$

e) $x^5 + y^3x + yx^2 + y^5 = -1$

8. Calcule y', y'' y y''' en cada uno de los siguientes casos:

a) 2^x

b) e^{x^2}

c) $(x^2-1)\,e^x$

d) $(\sqrt{x^3-2x+1})\,(x-1)$

e) $x^2\ ln\,(x^3-1)$

9. Ejercicios de aplicación:

a) Se estima que al cabo de t años, el tiraje de un periódico local será $T(t) = 100t^2 + 400t + 10{,}000$.

— Halle Δt, si t cambia de 2 a 5

— Halle e interprete $T'(t = 3)$

b) Halle la velocidad promedio entre $t = 2$ y $t = 10$
¿A qué velocidad se está moviendo el objeto al cabo de $t = 5$ minutos?

c) Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana sugiere que al cabo de t años el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire será de $Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$ partes por millón.

— ¿A qué ritmo estará cambiando el nivel de monóxido de carbono dentro de un año.

— ¿Cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono este año?

d) Se estima que al cabo de t años, la población de cierta comunidad suburbana será de $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ miles.

- Obtenga una fórmula para el ritmo de cambio de la población con respecto al tiempo.
- ¿A qué ritmo estará creciendo la población de la comunidad dentro de un año?
- ¿Cuánto crecerá realmente la población dentro de 9 años?
- ¿Qué sucederá en el futuro con el ritmo de crecimiento de la población?

e) El ingreso mensual total de un fabricante es de $R(q) = 240q + 0.05q^2$ dólares cuando se producen q unidades durante el mes. Usualmente el fabricante produce 80 unidades por mes y planea aumentar la producción mensual en una unidad.

- Use el análisis marginal para estimar el ingreso adicional que será generado por la producción de la unidad 81.
- Use la función de ingreso para calcular el ingreso adicional real que será generado por la producción de la unidad 81.

f) Un fabricante produce cierto artículo que vende a \$7500 cada uno. Sus costos de producción son: \$240,000 de arriendo y \$3800 por material y mano de obra. Calcule la utilidad marginal al producir 50 artículos.

g) La siguiente ecuación de demanda $p = 4300 - 86x$, relaciona el número x de artículos vendidos a un precio p.

- Obtenga el ingreso marginal al producir 40 unidades.
- A un precio de \$600, ¿cuál es el ingreso marginal?
- Si el costo total al producir x unidades es $c(x) = 3000 + 10x$, ¿cuál es la utilidad marginal al producir 40 unidades?

h) En cierta fábrica, el costo de producir x unidades es $c(x) = 0.4x^2 + x +$ \$300,000; la experiencia ha demostrado que se fabrican $x(t) = t^2 + 10t$ unidades en las primeras t horas. Calcule la razón a la que cambia el costo al producir $x = 400$ unidades en las primeras 12 horas.

i) Un importador de café brasilero estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \dfrac{4.374}{p^2}$ libras de café por semana cuando el precio sea de p pesos por libra. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café al cabo de 10 semanas? ¿Estará creciendo o decreciendo su demanda?

Referencias

Glass, J. Colin. *Métodos matemáticos para economistas.* McGraw-Hill.
Larson-Hostetler. *Cálculo y geometría analítica.* McGraw-Hill.
Aria, Jagdish. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Prentice Hall.
Budnick, Frank. *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill.

CAPITULO **13**

Aplicaciones de la derivada

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo, el estudiante estará en capacidad de:

1. Construir la gráfica de una función por métodos diferenciales.
2. Resolver problemas de aplicación de máximos y mínimos.
3. Calcular la razón de cambio de una variable relacionada con otras por medio de una función.
4. Hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado.

13.1 Introducción

Es difícil valorar la importancia de la construcción de gráficos en matemáticas. René Descartes (1596 - 1650) los utilizó por primera vez, contribuyendo en gran medida a los avances matemáticos de la segunda mitad del Siglo XVII. Actualmente todas las ciencias hacen amplio uso de las gráficas para describir relaciones entre variables. En este capítulo estudiaremos el procedimiento para la realización de una gráfica por métodos diferenciales, también el sistema necesario para obtener el punto óptimo de una función; maximizar utilidades y disminuir tiempos, son problemas que se aprenderán a resolver en este capítulo.

13.2 La gráfica de una función

Hasta ahora, el método utilizado para realizar la gráfica de una función ha sido construir una tabla de valores para luego dibujar cada uno de los puntos obtenidos en el plano cartesiano y obtener así la gráfica.

Este método, aunque puede ser muy fácil, y puede servir para realizar una buena cantidad de gráficas, es poco confiable para la obtención de la gráfica de ciertas funciones. En esta sección desarrollaremos una metodología basada en ciertas propiedades de las funciones y sus derivadas, para realizar en forma correcta la gráfica de una función dada.

La metodología en cuestión consiste en realizar una serie de pasos, con los cuales es posible determinar las características más importantes e interesantes de una gráfica. Estos pasos son:

> Pasos para la obtención de una gráfica
>
> 1. Determinación de los cortes con los ejes.
> 2. Obtención de la primera derivada y de los posibles puntos críticos.
> 3. Obtención de la segunda derivada y de los posibles puntos de inflexión.
> 4. Determinación de las regiones de concavidad (convexidad).
> 5. Determinación de las regiones de crecimiento y decrecimiento y de los máximos y mínimos.
> 6. Obtención de las asíntotas de la función, si existen.
> 7. Realización de la gráfica.

Unos pasos se deben realizar en estricto orden y otros no; para evitar confusiones y facilitar el aprendizaje, procuraremos seguir este orden establecido[33].

A manera de ilustración, trabajaremos algunos ejemplos y desarrollaremos la teoría necesaria en cada caso.

Ejemplo 1

Realice la gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 2$

Paso 1: Determinación de los cortes con los ejes

Para hallar los cortes con los ejes procedemos así:

a) Los cortes con el eje X se encuentran al resolver la ecuación $f(x) = 0$. En nuestro caso,

$$x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

Por medio de la división sintética, analizada en el Capítulo 7, concluimos que $x = 1$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación; por tanto $x = 1$ y $x = 2$ son los cortes de la gráfica con el eje X.

b) Los cortes con el eje Y se encuentran al calcular $f(x = 0)$
En nuestro caso,

$$f(x = 0) = -2$$

Por lo que el corte con el eje Y, está ubicado en $y = -2$.
Los cortes de la gráfica son: $(1, 0)$ y $(0, -2)$.

Paso 2: Obtención de la primera derivada y de los posibles puntos críticos

[33] Es posible que el mismo varíe un poco de un texto a otro.

Al calcular la primera derivada de $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

La determinación de los puntos críticos se realiza de acuerdo con la siguiente teoría:

Definición

Si $f(c)$ existe, decimos que c es un punto crítico de f, si $f'(c) = 0$ ó si $f'(c)$ no existe.

a) En el caso $f'(c) = 0$, f presenta un máximo o mínimo local en c, esto es, $f(c)$ es el valor mayor o menor de un intervalo que contiene a c (*véase* Figura 13.1).

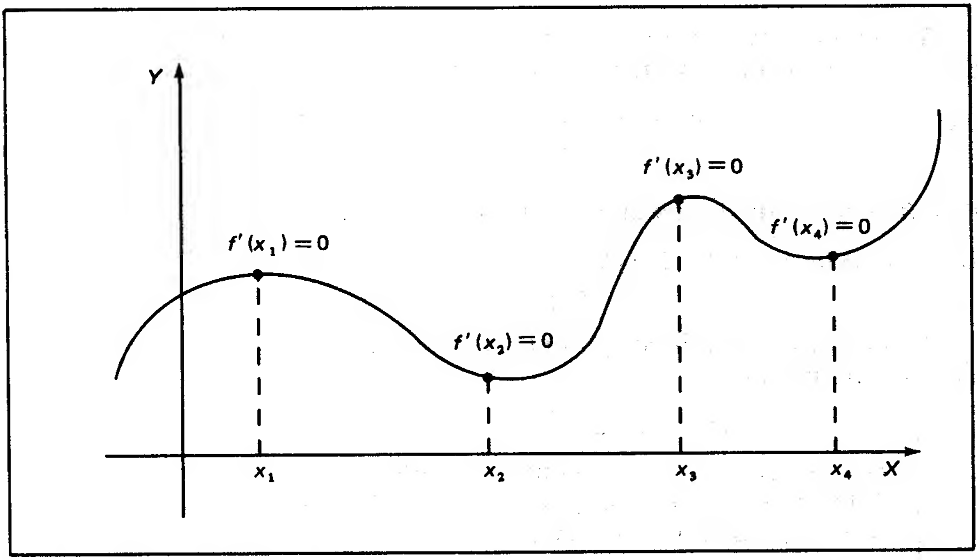


Figura 13.1 Máximos y mínimos locales.

Formalmente definimos los puntos máximos y mínimos locales[34] así:

b) En el caso de que $f'(c)$ no exista, puede ser que en $f(c)$ se presente "un pico", o que c es tal, que $\lim_{x \to c} f'(x) = \infty$ (*véase* Figura 13.2).

[34] Los valores máximos y mínimos locales también se denominan valores máximos y mínimos relativos, o simplemente extremos relativos.

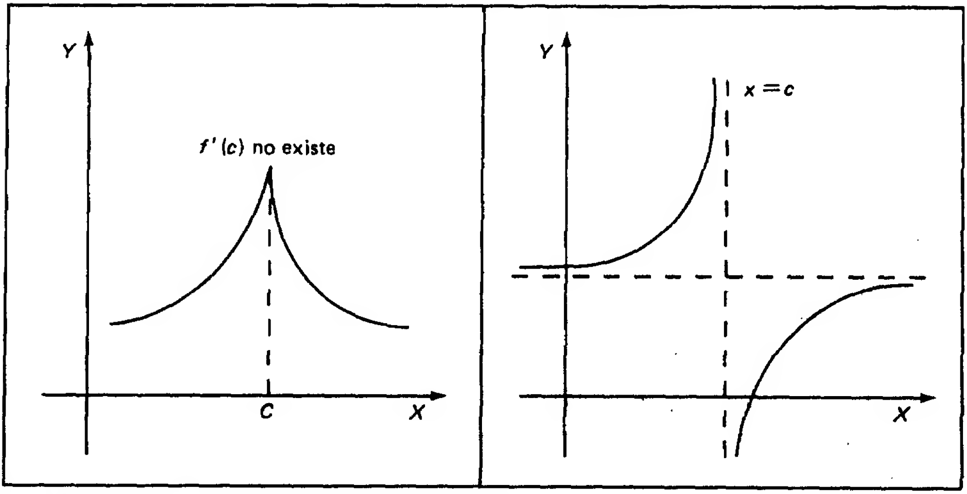


Figura 13.2 Valores de c para los que $f'(x)$ no existe.

En nuestro caso: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, luego $f'(x)$ está definida para todo x, por lo que los únicos puntos críticos son los valores de x, tal que $3x^2 - 8x + 5 = 0$; es decir $x = \frac{5}{3}$, $x = 1$ son los puntos críticos.

Paso 3: Obtención de la segunda derivada y de los puntos de inflexión

La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = 6x - 8$$

La determinación de los puntos de inflexión se realiza de acuerdo con la siguiente definición:

> Decimos que c es un punto de inflexión, si $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe: c es un punto en el que la gráfica de f cambia su concavidad, de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa[35].

Decimos que una gráfica es cóncava hacia arriba si la gráfica queda por arriba de sus rectas tangentes, en caso contrario, decimos que es cóncava hacia abajo. *Véase* Figura 13.3.

[35] Algunos autores la llaman convexa arriba o convexa abajo.

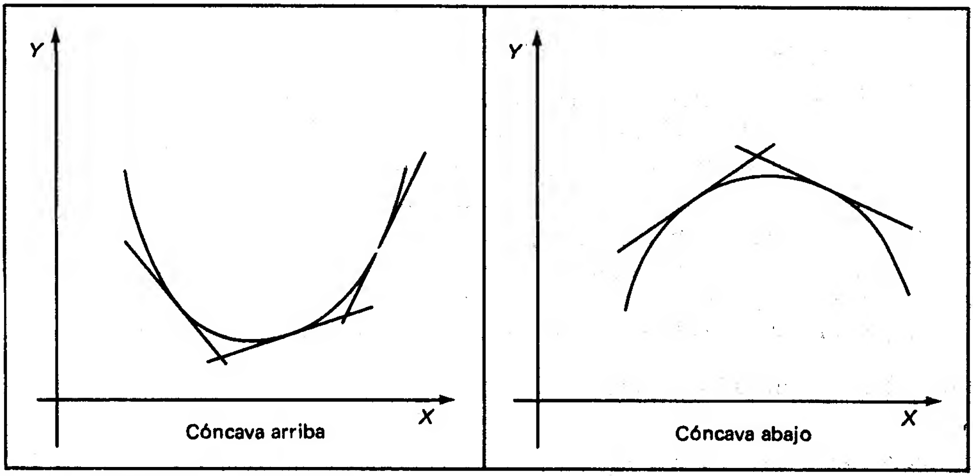


Figura 13.3 Concavidad de una curva.

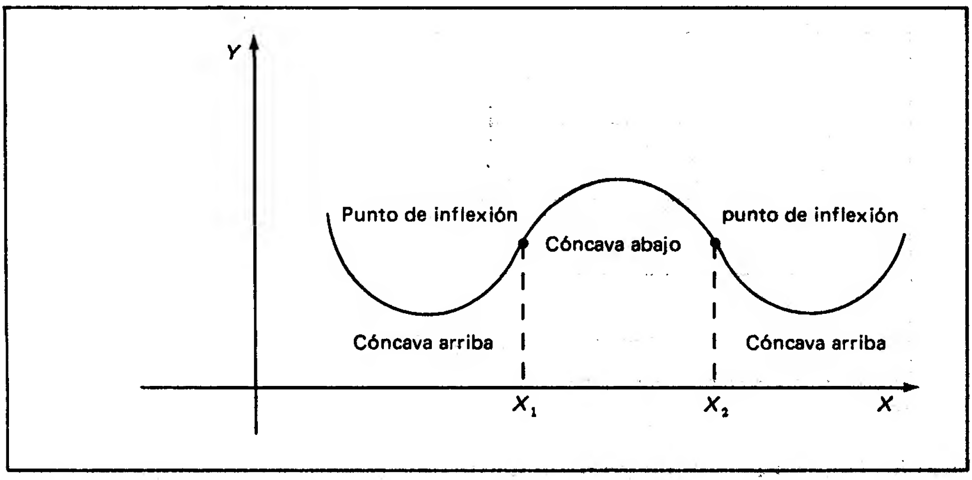


Figura 13.4 Puntos de inflexión.

En nuestro caso, como $f''(x) = 6x - 8$, $f''(x)$ está definida para todo x, los puntos de inflexión son los x tales que $f''(x) = 0$, esto es:

$$6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$x = \dfrac{4}{3}$ es el único punto de inflexión.

Paso 4: Determinación de las regiones de concavidad

La determinación de las regiones de concavidad se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1

Si f es una función con segunda derivada, entonces:
f es cóncava hacia arriba, para todo x tal que $f''(x) > 0$.
f es cóncava hacia abajo, para todo x tal que $f''(x) < 0$.

En nuestro caso sabemos que $f''(x) = 6x - 8$; por tanto f será cóncavo hacia arriba con los x en los que $6x - 8 > 0$, y cóncava hacia abajo en los x en los que $6x - 8 < 0$.

Siguiendo el procedimiento descrito en la segunda sección de este capítulo, podemos determinar que $f'' > 0$ si $x > \frac{4}{3}$ y $f'' < 0$ si $x < \frac{4}{3}$, luego, f es cóncava hacia arriba si $x > \frac{4}{3}$, y f es cóncava hacia abajo si $x < \frac{4}{3}$. La Tabla 13.1 resume dicha información.

$x < \frac{4}{3}$	$x = \frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$	
$-$		$+$	f''
$\cap$		$\cup$	f
Cóncava abajo	← punto de inflexión →	Cóncava arriba	

Tabla 13.1

Paso 5: Determinación de las regiones de crecimiento y decrecimiento, y de máximos y mínimos

La determinación de las regiones de crecimiento y decrecimiento se basa en el siguiente teorema:

Teorema 2

Si f es una función con primera derivada, entonces:

— f es creciente, para todo x tal que $f'(x) > 0$.

— f es decreciente, para todo x tal que $f'(x) < 0$.

El concepto de función creciente y función decreciente viene dado por la siguiente definición:

Se dice que f es una función creciente en un intervalo, si dados dos puntos x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. f es decreciente, si dados $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$, *véase* Figura 13.5.

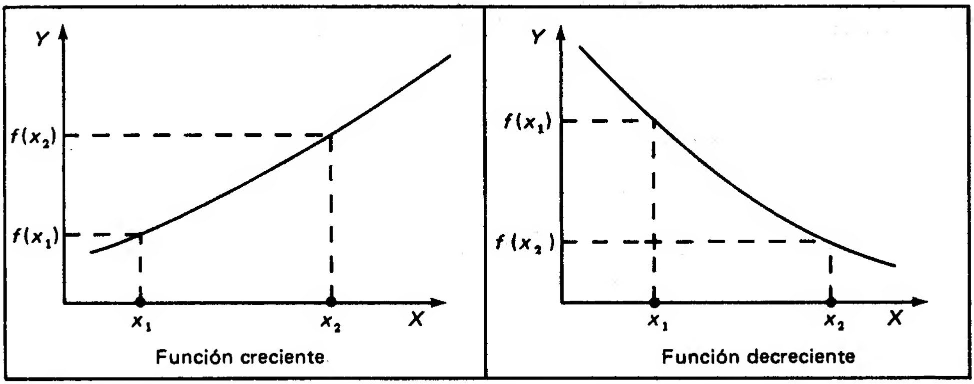


Figura 13.5 Funciones crecientes y decrecientes.

En nuestro caso, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

Para hallar las regiones de crecimiento o de decrecimiento, debemos encontrar los valores de x, tales que $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, respectivamente.

De manera similar, obtenemos dichas regiones solucionando: $3x^2 - 8x + 5 > 0$ y $3x^2 - 8x + 5 < 0$.

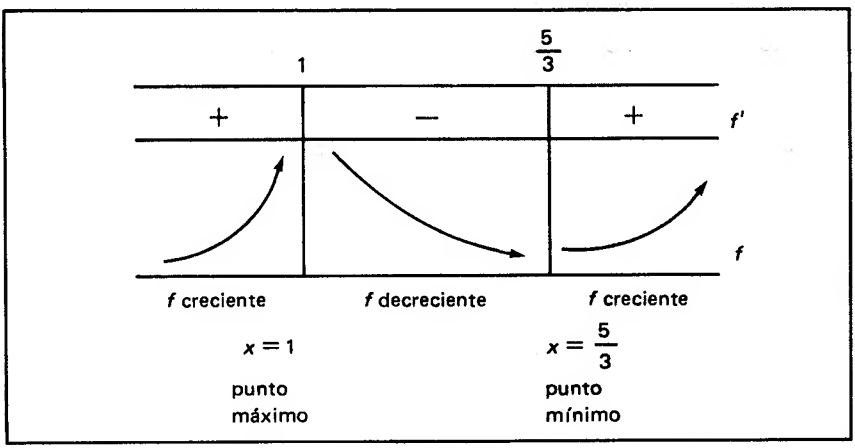


Tabla 13.2 Regiones de crecimiento y decrecimiento.

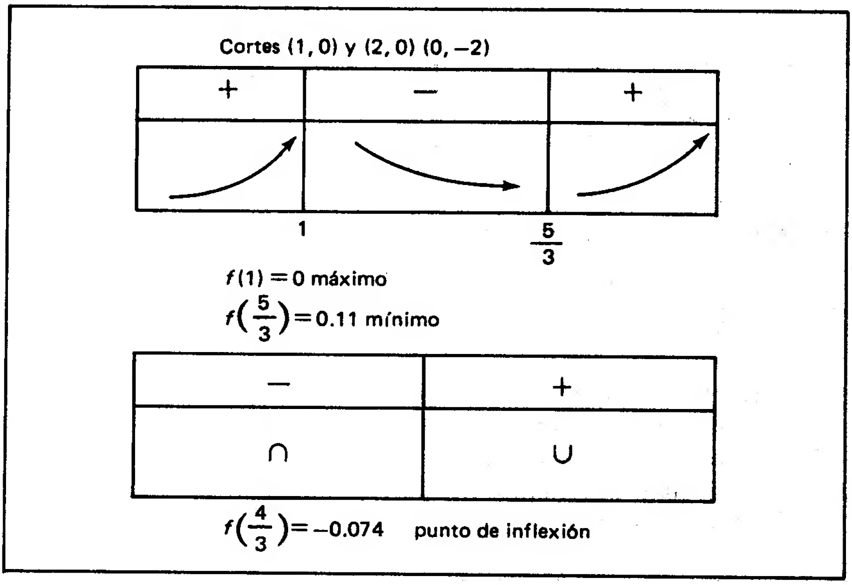
En la Tabla 13.2, observamos que $x = 1$ es un punto máximo, f pasa de creciente a decreciente; $x = \dfrac{5}{3}$ es un mínimo, f pasa de decreciente a creciente.

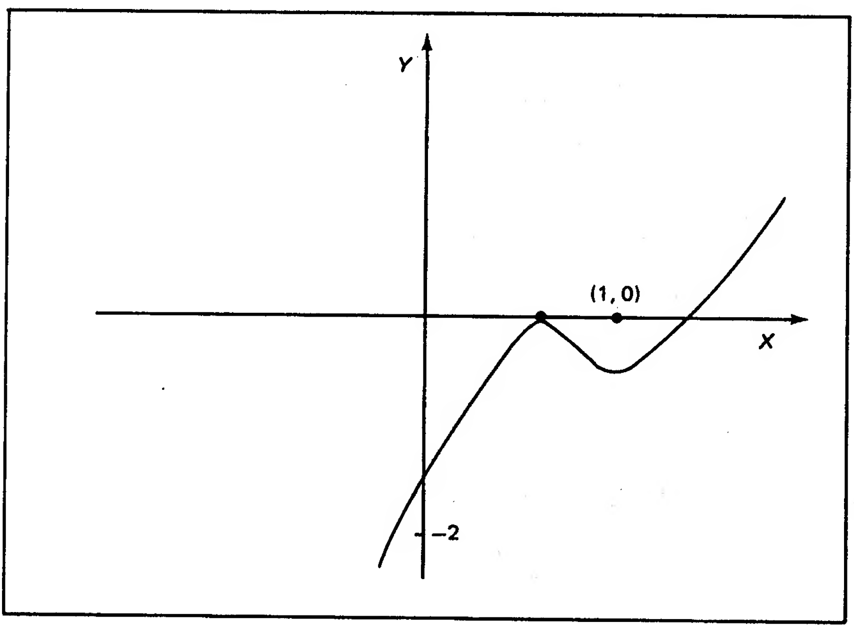
Paso 6: Obtención de asíntotas

En este caso particular, por tratarse de una función polinómica, no existen asíntotas. La teoría se tratará en el siguiente ejemplo.

Paso 7: Realización de la gráfica

A continuación aparece un resumen de las características más importantes de la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, conclusión de los pasos anteriores:





Ejemplo 2

Realice la gráfica de $y = \dfrac{x-3}{x+2}$.

Paso 1: Cortes con los ejes

a) Cortes con x $\dfrac{x-3}{x+2} = 0,\ x = 3$

luego el corte con x es $(3,0)$

b) Cortes con y $f(0) = -\dfrac{3}{2}$, luego el corte con el eje Y es $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Paso 2: Primera derivada y puntos críticos

$$y' = \frac{(x+2)(1) - (x-3)(1)}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{5}{(x+2)^2}$$

Punto crítico $x = -2$, ya que $y'(-2)$ no existe.

Paso 3: Segunda derivada y puntos de inflexión

$$y'' = \frac{(x+2)^2(0) - (5)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$y'' = \frac{-10(x+2)}{(x+2)^4} \quad [36]$$

puntos de inflexión: $x = -2$, ya que $y''(-2) = 0$

Paso 4: Regiones de concavidad

	-2		
$+$		$-$	f''
$\cup$		$\cap$	f
	punto de inflexión		

[36] Con el ánimo de facilitar la solución de la inecuación $f'(x) > 0$, es mejor no cancelar el factor $x + 2$ en esta expresión.

Paso 5: Regiones de crecimiento: máximos y mínimos

Como el punto crítico $x = -2$ es un punto de inflexión, entonces la gráfica no tiene ni máximos ni mínimos. De hecho $f'(x)$ es siempre positiva, y por tanto f es siempre creciente.

Paso 6: Asíntotas

Como dijimos anteriormente, una asíntota es una recta[37] a la que una gráfica se aproxima para ciertos valores. En una gráfica se pueden presentar tres tipos de asíntotas lineales: horizontales, verticales y oblicuas, de las cuales máximo dos se pueden presentar simultáneamente en una misma gráfica. En la Figura 13.6 se ilustran estos casos.

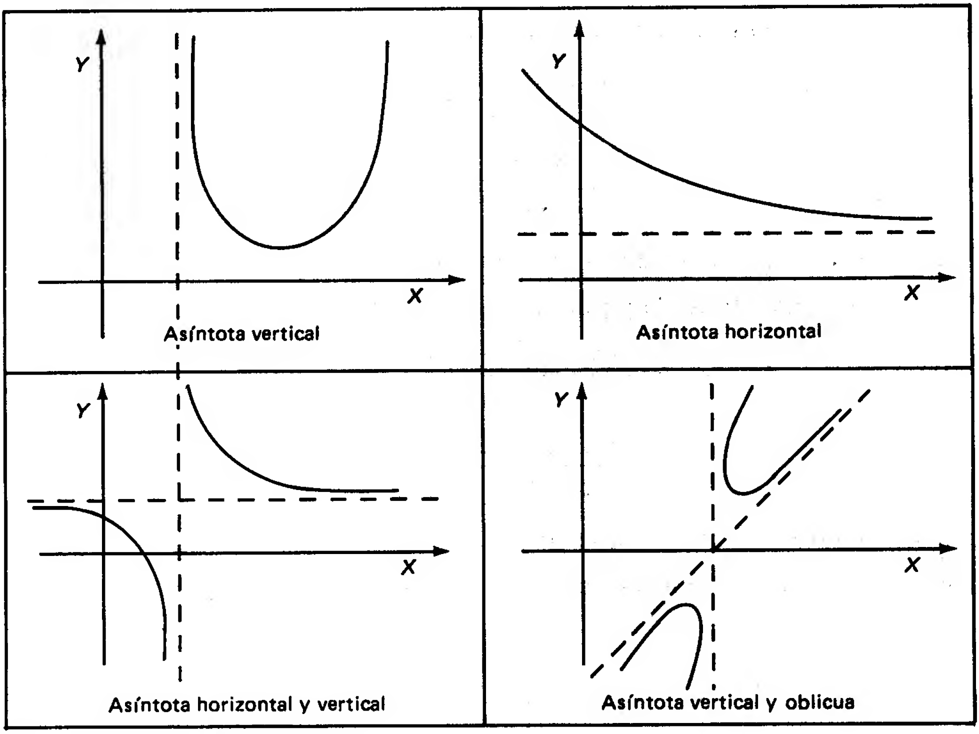


Figura 13.6 Asíntotas de una gráfica.

Como se observa en la figura y se explicará más adelante, no se presenta el caso en que una gráfica tenga simultáneamente asíntota horizontal y oblicua.

[37] En nuestro estudio sólo consideraremos asíntotas de tipo lineal, aunque existen de otro tipo, por ejemplo cuadrática y cúbica.

Determinación de asíntotas

La existencia de las asíntotas depende de la clase de función.

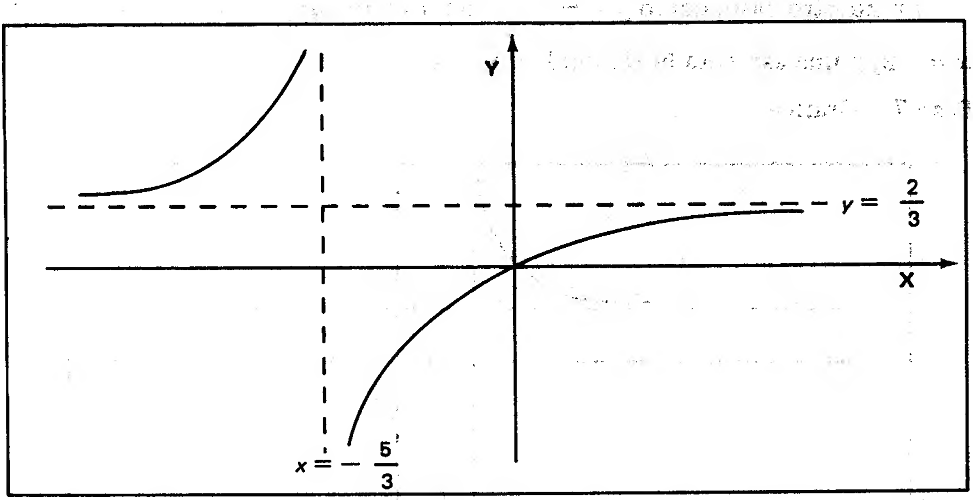
Si una función es racional, esto es de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, escrita de la manera más simplificada, su gráfica tendrá:

a) Asíntotas verticales en los valores de x en los cuales $q(x) = 0$.

b) Asíntotas horizontales si el grado de $p(x)$ es menor o igual al grado de $q(x)$, en cuyo caso,
   - la asíntota será la recta $y = 0$ si el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador.
   - la asíntota es la recta $y = \frac{a}{b}$, donde a es el coeficiente de la variable de mayor grado del numerador y b el coeficiente de la variable de mayor grado del denominador.

Ejemplo 3

En la función $f(x) = \dfrac{2x}{3x+5}$, se presenta una asíntota vertical en $X = -\dfrac{5}{3}$ ya que este valor de x hace el denominador cero. Existe una asíntota horizontal en $y = \dfrac{2}{3}$ ya que 2 es el coeficiente de la variable de mayor grado del numerador y 3 es el coeficiente de la variable de mayor grado del denominador, como se muestra en la figura.

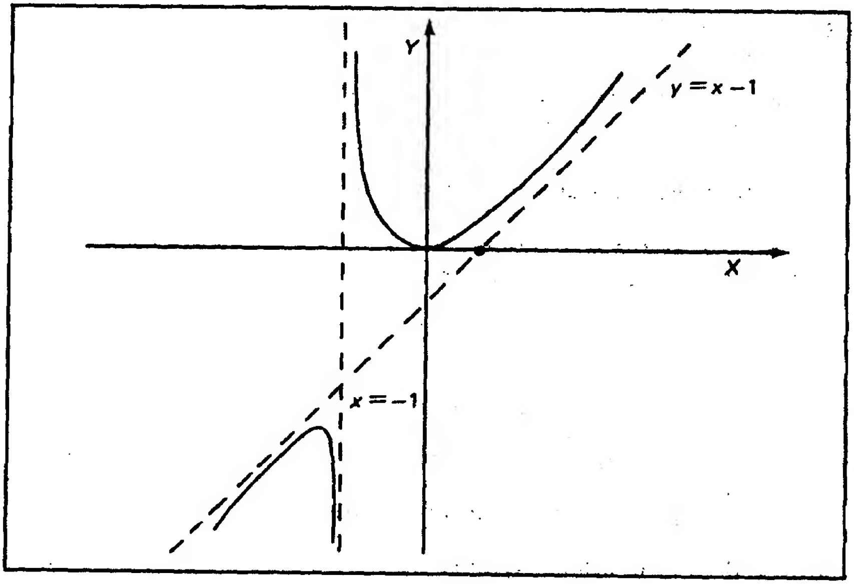


c) Asíntotas oblicuas, si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En este caso, la asíntota oblicua es la función lineal (recta) que se obtiene en el cociente al realizar $p(x)$ entre $q(x)$.

Ejemplo 4

La función $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ tiene una asíntota oblicua dada por la recta $y = x - 1$, ya que este es el cociente de dividir x^2 entre $x + 1$.

Además, esta función tiene una asíntota vertical en $x = -1$. En la siguiente figura se ilustra la situación.



En nuestro caso, como $y = \dfrac{x-3}{x+2}$, tendremos una asíntota vertical en $x = -2$, y una asíntota horizontal en $y = 1$.

Paso 7: Gráfica

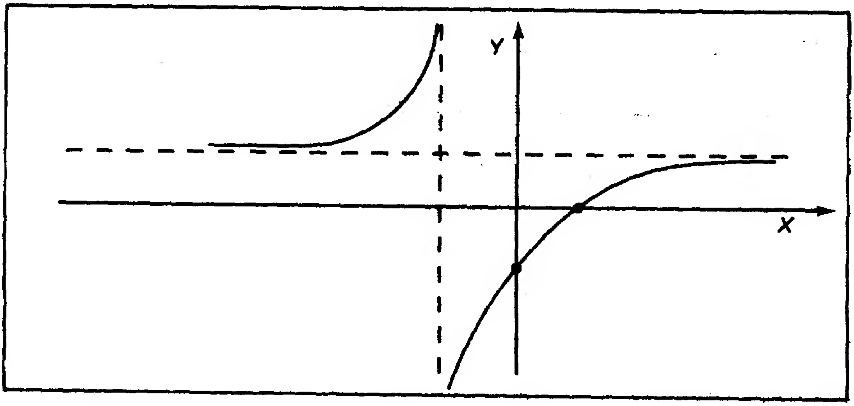


Gráfico de $y = \dfrac{x-3}{x+2}$.

Ejemplo 5

Realice la gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 2}$.

Paso 1: Cortes con los ejes

a) Con el eje x,

$$\frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = 0, \quad 2x^2 = 0 \qquad x = 0$$

b) Con el eje y, $y(x = 0) = 0$

luego el punto de corte es $(0, 0)$.

Paso 2: Primera derivada

$$y' = \frac{(x^2 - x - 2)4x - 2x^2(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$y' = \frac{-2x^2 - 8x}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x(x + 4)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)}$$

Puntos críticos

$$\frac{x}{f'(x)} = 0, \; x = 0, \; x = -4$$

$$\frac{x}{f'(x)} \text{ no existe; } x = 2, \; x = -1$$

Paso 3: Segunda derivada

$$y' = -2\,\frac{x^2 + 4x}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$y'' = -2\,\frac{(x^2 - x - 2)^2\,(2x + 4) - (x^2 + 4x)\,2\,(x^2 - x - 2)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^4}$$

$$y'' = -2\,\frac{(x^2 - x - 2)^2\,[(x^2 - x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4x)(2x - 1)]}{(x^2 - x - 2)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2 - x - 2)(-x^3 - 6x^2 + 4)}{(x^2 - x - 2)^4}$$

$$y'' = \frac{4(x^2 - x - 2)(x^3 + 6x^2 + 4)}{(x^2 - x - 2)^4}$$

Al hacer $y'' = 0$, obtenemos:

$x = 2$ y $x = -1$ (soluciones de $x^2 - x - 2 = 0$)

$x = -6.1$ (solución única de $x^3 + 6x^2 + 4 = 0$)

como puntos de inflexión

Paso 4: Regiones de concavidad

	-6.1	-1	2	
$-$	$+$	$-$	$+$	f''
$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	f

Paso 5: Regiones de crecimiento máximos y mínimos

Como $x = -1$ y $x = 2$ son puntos de inflexión, entonces $x = 0$ y $x = -4$ son puntos máximos y mínimos.

	-4	0	
$-$	$+$	$-$	f'
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	f

luego $x = -4$ es un mínimo y $x = 0$ es un máximo.

$$f(x = 0) = 0$$

$$f(x = -4) = 1777$$

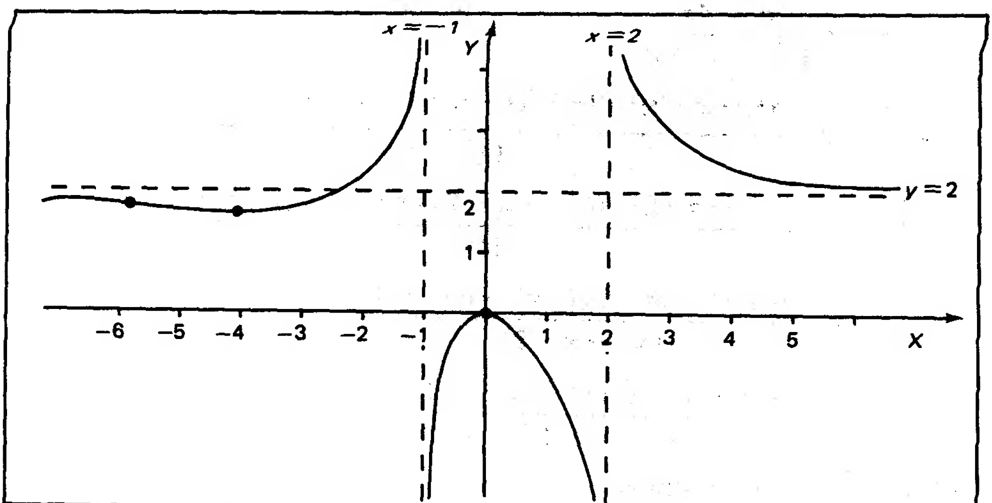
Paso 6: Asíntotas

Verticales: los $\dfrac{x}{x^2 - x - 2} = 0,$

luego $x = -1$ y $x = 2$.

Horizontales: $y = 2$

Paso 7: Gráfica



Gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 2}$.

Observación: Note que aunque la gráfica corta a la asíntota, se aproxima a ella para valores grandes negativos.

13.3 Problemas de máximos y mínimos

Una de las aplicaciones más usuales del cálculo diferencial, es hallar máximos y/o mínimos (puntos óptimos) en problemas prácticos de aplicación. La teoría desarrollada en la sección anterior, para hallar máximos o mínimos locales de funciones, puede aplicarse para encontrar los valores máximos y/o mínimos en problemas prácticos.

Al igual que para la realización de una gráfica, la solución de un problema de máximos y mínimos puede obtenerse siguiendo una serie de pasos que se enuncian a continuación:

> Pasos a seguir para solucionar un problema de máximos y mínimos:
>
> 1. Escribir una ecuación que represente la cantidad que se quiere maximizar (o minimizar).
> 2. Si la ecuación anterior contiene más de una variable, es necesario encontrar una ecuación que relacione dichas variables, con el objeto de escribir la ecuación a maximizar (o minimizar) en función de una única variable. Un gráfico puede ser de gran ayuda.
> 3. Cuando la ecuación a maximizar (o minimizar) dependa de una única variable, se obtiene el máximo (o mínimo), igualando la primera derivada a cero, buscando los puntos en donde la primera derivada no existe, o verificando los puntos extremos.
> 4. Verificar que efectivamente el valor obtenido es un máximo (o mínimo).

Ejemplo 6

Una fábrica produce x artículos a un costo $c(x) = 150{,}000 + 3602x - 0.02x^2$. La ecuación de la demanda de dicha fábrica está determinada por la ecuación $30x + p = 6600$. Encuentre el número de unidades que se deben vender para maximizar las utilidades. En este caso,

Paso 1:

Es claro que se quiere maximizar las utilidades; luego la ecuación es:

$$U = R - C$$

en donde U representa la utilidad, R el ingreso y C el costo.

$$U = x \cdot p - (150{,}000 + 3602x - 0.02x^2)$$

Paso 2:

Como en la ecuación anterior existen dos variables, x y p, debemos obtener una ecuación que las relacione.

En este caso $30x + p = 6600$,

luego $p = 6600 - 30x$, entonces

$U = x(6600 - 30x) - (150{,}000 + 3602x - 0.02x^2)$

$U = 6600x - 30x^2 - 150{,}000 - 3602x + 0.02x^2$

$U(x) = 2998x - 29.98x^2 - 150{,}000$

Paso 3 :

Derivando obtenemos:

$$U'(x) = 2998 - 59.96x$$

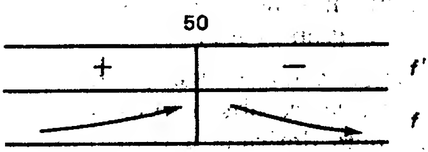
igualando a cero, obtenemos:

$$2998 = 59.96x$$

$$x = \frac{2998}{59.96}$$

$$x = 50$$

Paso 4:

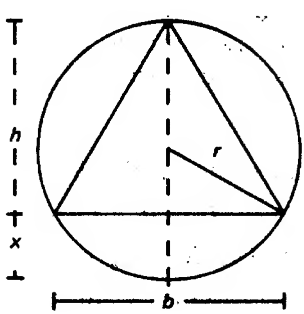


Efectivamente, el valor obtenido es un máximo.

Ejemplo 7

Halle las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área, que puede inscribirse en un círculo de radio $r = 10$.

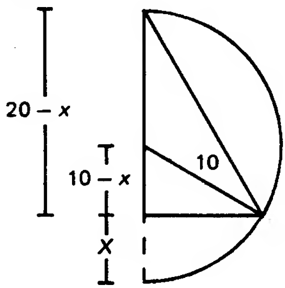
Paso 1:



Como lo que se quiere es maximinar el área del triángulo, entonces:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Paso 2: Por la figura:



$$b = 2\sqrt{10^2 - (10-x)^2}$$
$$b = 2\sqrt{20x - x^2}$$
$$h = 20 - x$$

luego, $A = \dfrac{2\sqrt{20x - x^2}\,(20-x)}{2}$

Paso 3: $A' = \sqrt{20x - x^2}\,(-1) + (20-x)\,\dfrac{1}{2}\,(20x - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(20-2x)$

$$A' = \frac{-(20x - x^2) + (20-x)(10-x)}{\sqrt{20x - x^2}} = 0$$

$$(20-x)(10-x) = x(20-x)$$
$$10 - x = x$$
$$10 - x = 2x$$
$$x = 5$$

Paso 4:

	5		
$+$		$-$	f'
$\nearrow$		$\searrow$	f

luego con $x = 5$ se obtiene un área máxima, por lo que

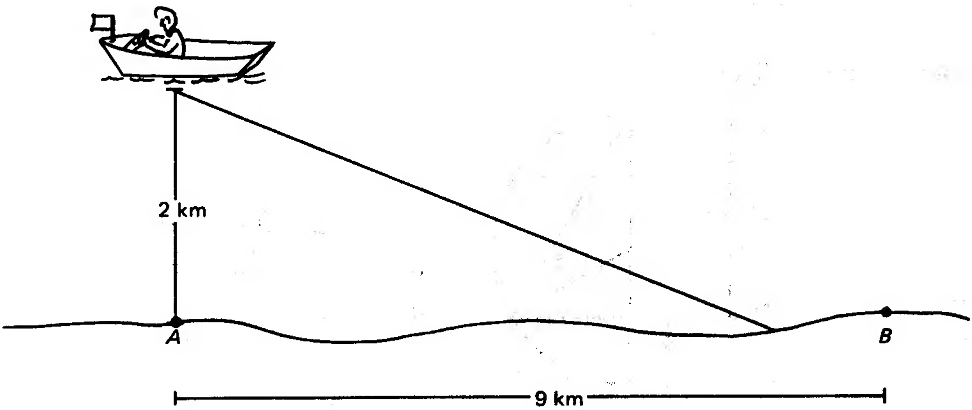
$$b = 2\sqrt{100 - 25} = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$$
$$h = 20 - 5 \qquad h = 15$$

entonces, $b = 10\sqrt{3}$ y $h = 15$ son las dimensiones del triángulo de área máxima.

Ejemplo 8

Un hombre está en una lancha en el mar a una distancia de 2 km de un punto A de la playa, y debe ir a un punto B de ella situado a 9 km de A, como se muestra en la figura. Si puede recorrer la playa a una velocidad de

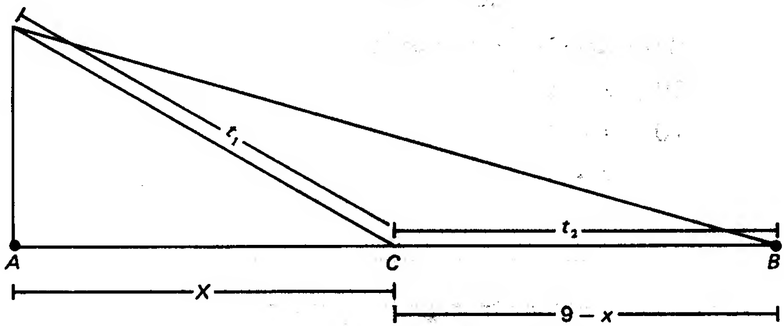
60 km por hora, y viajar en la lancha a una velocidad de 10 km por hora, ¿qué recorrido debe hacer si quiere minimizar el tiempo empleado?



Paso 1:

Asumiendo que el hombre desembarca en un punto C a x kilómetros de A, entonces el tiempo total t empleado para trasladarse desde el punto inicial hasta el punto B es el tiempo empleado en el viaje en lancha t_1, y el tiempo empleado en caminar t_2; entonces

$$t_T = t_1 + t_2$$



Como las velocidades son constantes, el tiempo empleado para recorrer cualquier distancia d, es $t = \dfrac{d}{v}$; luego:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} \text{ y } t_2 = \frac{d_2}{v_2} \quad \text{en donde } d_1 = \sqrt{4 + x^2}\text{; por lo que}$$

$$t_T = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{15} + \frac{9 - x}{60} = \frac{4\sqrt{4 + x^2} + (9 - x)}{60}$$

Paso 2:

Como el tiempo, que es la función a minimizar, está colocada en términos de una única variable, entonces

Paso 3:

$$(t_T)' = \frac{4X(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} + (-1)}{60} = 0$$

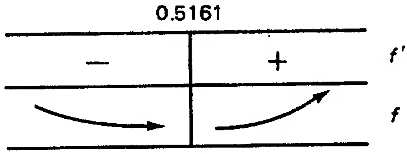
$$\frac{4x}{\sqrt{4+x^2}} = 1 \; ; \quad \frac{16x^2}{4+x^2} = 1$$

$$16x^2 = 4 + x^2 \; ; 15x^2 = 4 \; ; x = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{3.875}$$

por lo que el tiempo empleado es:

$$t_T = \frac{8.26 + 8.4838}{60} = 0.2790$$

Paso 4:



El valor obtenido es efectivamente un mínimo.

Nota: En algunos casos es importante probar los valores extremos, en nuestro caso, halle el tiempo para $x = 0$ y $x = 9$.

$$\text{si} \quad x = 0 \quad t_T = \frac{2}{15} + \frac{9}{60} = 0.2833$$

$$x = 9 \quad t_T = \frac{9.22}{15} = 0.6146$$

lo anterior reconfirma que, efectivamente, $t = 0.2790$ es el tiempo mínimo.

13.4 Variables relacionadas: (razón de cambio)

En distintas situaciones de la vida diaria, muchas funciones cambian con el tiempo y todas las variables que las componen. Consideremos el ejemplo de un tanque de forma cónica al que le está entrando agua a una determinada velocidad; a medida que el tiempo cambia, se altera el volumen de agua que contiene el tanque, cambian también la altura del nivel del agua y el radio, y por ende el área de la superficie circular del mismo. En este caso, el volumen, el área superficial, el radio y la altura, son variables relacionadas.

En Economía, la utilidad depende de la cantidad de unidades vendidas y del precio de cada unidad; por tanto, la utilidad, el número de unidades vendidas y el precio, son variables relacionadas.

Igual que en los problemas de máximos y mínimos, en los de variables relacionadas existe un procedimiento a seguir para obtener la solución:

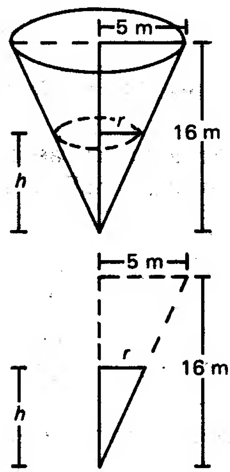
> Pasos a seguir para solucionar un problema de variables relacionadas:
>
> 1. Encontrar una ecuación que relacione la variable cuya razón de cambio se ha de calcular, con otras variables cuya razón de cambio se conoce. Una figura puede ser de gran ayuda.
> 2. Derivar la ecuación anterior en forma implícita.
> 3. Remplazar las cantidades conocidas.

Ejemplo 9

Un tanque cónico tiene 10 m de diámetro y 16 m de altura. Si está entrando agua al tanque a razón de 800 m^3 /seg, calcule la razón de cambio, del radio de la superficie, cuando éste es de 3 m.

Paso 1:

Por geometría sabemos que el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



Además en la figura podemos observar que los triángulos son semejantes, por lo cual es posible realizar una razón entre sus lados correspondientes, así:

$$\frac{5}{r} = \frac{16}{h} \; ; h = \frac{16}{5} r$$

entonces: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \left(\frac{16}{5} r \right)$, luego

$$V = \frac{16}{15} \pi r^3$$

Paso 2: Derivando implícitamente con respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{16}{15} \pi \left(3 r^2 \frac{dr}{dt} \right)$$

Paso 3: Remplazando:

$$800 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} = \frac{16}{15} \pi (3)(9 \text{ m}^2) \frac{dr}{dt}$$

$$\text{de donde } \frac{dr}{dt} = 8.84 \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

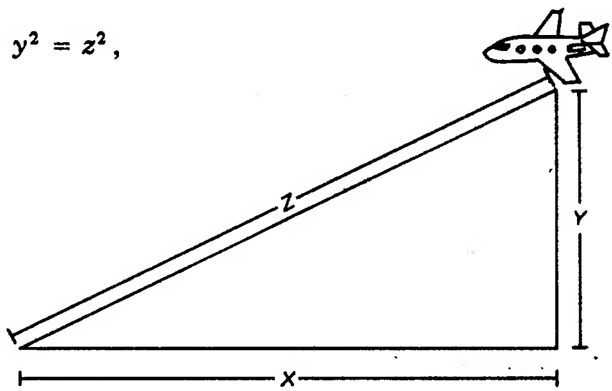
Ejemplo 10

Un avión que vuela a una velocidad de 990 km por hora a una altura de 10,560 m, se acerca a un aeropuerto. En el momento en que la distancia entre el aeropuerto y el avión es de 300 km, ¿cómo está cambiando esta distancia?

Paso 1:

Por la figura, $x^2 + y^2 = z^2$,

luego,



Paso 2: $$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt},$$

como la altura de vuelo del avión es constante, $\frac{dy}{dt} = 0$, por lo que

$$x \frac{dx}{dt} = z \frac{dz}{dt}, \text{ luego}$$

Paso 3:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{kx}{z} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{(300 \text{ km})^2 - (10.56 \text{ km})^2}}{300 \text{ km}} \cdot 990 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{299.83}{300} \cdot 990 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 989.44 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 11

El ingreso mensual por publicidad de cierta revista es $R(x) = 56{,}000 + 1050x + 0.175x^2$ pesos, cuando se venden x revistas. La circulación de la revista es de 1500 ejemplares mensuales, y está creciendo a razón de 80 revistas por mes. ¿A qué ritmo está creciendo el ingreso mensual por publicidad?

Paso 1:

$$R(x) = 56{,}000 + 1050x + 0.175\,x^2$$

Paso 2:

$$\frac{dR}{dt} = (1059 + 0.35\,x)\quad\frac{dx}{dt}$$

Paso 3:

$$\frac{dR}{dt} = [1050 + 0.35\,(1500)]\,(80)$$

$$\frac{dR}{dt} = (1575)\,(80)$$

$$\frac{dR}{dt} = 126{,}000 \text{ pesos por mes}$$

13.5 La tangente a una curva

Para encontrar la ecuación de la recta que es tangente a una curva en un punto dado, necesitaremos encontrar la pendiente de dicha tangente.

Consideremos la siguiente definición:

> Definición de pendiente de una curva:
>
> La pendiente m de una recta tangente a una curva $f(x)$ en el punto a, es
>
> $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Ejemplo 12

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el punto $x = 3$.

Primero hallaremos la derivada de $f(x)$, para poder calcular m.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \text{ luego}$$

$$m = f'(a) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18$$

$$= 9$$

Ahora hallaremos la ecuación de la recta.

En $x_0 = 3$, $f_0(x) = 0 = y_0$.

Como $y = y_0 + m\,(x - x_0)$, entonces

$$y = 0 + 9\,(x - 3)$$
$$y = 9x - 27$$

Ejemplo 13

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \ln x - x^2$ en el punto $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} - 2(1) = -1 = m$$

En $x_0 = 1$, $y_0 = \ln 1 - 1^2 = -1$

luego $y = y_0 + m\,(x - x_0)$

$$y = -1 - 1\,(x - 1)\text{, luego}$$
$$y = -x \text{ es la recta tangente}$$

13.6 Resumen

Recuerde que:

1. Si $f(c)$ existe, decimos que c es un punto crítico de f, si $f'(c) = 0$ ó si $f'(c)$ no existe.
2. Si $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, decimos que C es un punto de inflexión.
3. Si f es una función con segunda derivada, entonces f es cóncava hacia arriba, para todo x, tal que $f''(c) > 0$ y f es cóncava hacia abajo, para todo x, tal que $f''(x) < 0$.
4. Si f es una función con primera derivada, entonces f es creciente para todo x, tal que $f'(x) > 0$ y f es decreciente para todo x, tal que $f'(x) < 0$.
5. Los pasos para realizar una gráfica son:
   a) Determinar los cortes con los ejes.
   b) Obtener la primera derivada y de los posibles puntos críticos.
   c) Obtener la segunda derivada y de los posibles puntos de inflexión.
   d) Determinar las regiones de concavidad (convexidad).
   e) Determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento y de los máximos y mínimos.
   f) Obtener las asíntotas de la función, si existen.
   g) Realizar la gráfica.

6. Los pasos a seguir para solucionar un problema de máximos y mínimos son:
   a) Escribir una ecuación que represente la cantidad que se quiere maximizar (o minimizar).
   b) Si la ecuación anterior contiene más de una variable, es necesario encontrar una ecuación que relacione dichas variables, con el objeto de poder escribir la ecuación a maximizar (o minimizar) en función de una única variable.
   Un gráfico puede ser de gran ayuda.
   c) Cuando la ecuación a maximinar (o minimizar) dependa de una única variable, se obtiene el máximo o mínimo, igualando la primera derivada a cero, buscando los puntos en donde la primera derivada no existe, o verificando los puntos extremos.
   d) Verificar que efectivamente el valor obtenido es un máximo (o mínimo).
7. Los pasos a seguir para solucionar un problema de variables relacionadas son:
   a) Encontrar una ecuación que relacione la variable cuya razón de cambio se ha de calcular, con otras variables cuya razón de cambio se conoce.
   Una figura puede ser de gran ayuda.
   b) Derivar la ecuación anterior en forma implícita.
   c) Remplazar las cantidades conocidas.

13.7 Ejercicios y problemas

1. **En las siguientes funciones determine puntos máximos, mínimos, puntos de corte con los ejes, regiones de crecimiento, decrecimiento y puntos de inflexión. Realice el gráfico.**
   a) $f(x) = x^3 - 3x - 4$
   b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$
   c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
   d) $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3$
   e) $f(x) = (x^2 - 1)^5$
   f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
   g) $f(x) = \dfrac{2x + 18}{x + 1}$
   h) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$
   i) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(8 - x)$

j) $f(x) = 10x^3\,(x-1)^2$

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x}$

l) $f(x) = \dfrac{3x^3-2}{x^2}$

ll) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$

2. Resuelva los siguientes problemas de máximos y mínimos:

a) El departamento de recreación de una ciudad planea construir un campo de juego rectangular que tenga un área de 3600 metros cuadrados y rodearlo con una valla. ¿Cómo se puede hacer usando la menor cantidad de valla?

b) La librería de un colegio puede obtener del editor un libro a un costo de $2000 la unidad y ha estado ofreciéndolo a $8000. A este precio, usualmente ha vendido 200 ejemplares por mes. La librería planea rebajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada $500 de reducción en el precio se venderán 20 libros más. ¿A qué precio debería vender el libro para generar el mayor beneficio posible?

c) Para encerrar un campo rectangular hay 320 m de valla disponible. ¿Cómo debería usarse esta valla para que el área encerrada sea lo más grande posible?

d) Un cultivador de cítricos estima que si se plantan 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media decrecerá en 4 naranjas por árbol adicional plantado en la misma extensión. ¿Cuántos árboles debería plantar el cultivador para maximizar la producción total?

e) Un fabricante ha estado vendiendo bombillas a $320 pesos cada una y, a este precio los consumidores han comprado 600 bombillas por mes. El fabricante desearía elevar el precio y estima que por cada $80 pesos de incremento en el precio se venderán 1000 bombillas menos cada mes. El puede producir las bombillas a un costo de $200 pesos por bombilla. ¿A qué precio debería vender las bombillas para generar el mayor beneficio posible?

f) Una caja abierta tiene que ser hecha a partir de una pieza cuadrada de cartón de 18 por 18 pulgadas, quitando un pequeño cuadrado de cada esquina y plegando las alas para formar los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de este modo?

g) Una caja cerrada con base cuadrada debe tener un volumen de 250 m^3 El material para el suelo y la tapa de la caja cuestan $75 pesos por metro cuadrado y el material para los lados cuesta $50 pesos por metro cuadrado. ¿Puede construirse la caja por menos de $500 pesos?

h) Una lata cilíndrica debe contener 4 pulgadas cúbicas de zumo de naranja congelado. El costo del metal de construcción de la tapa y de la base es el doble por pulgada cuadrada que el del cartón del lado. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata menos costosa?

i) Una firma de plásticos ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8000 tablas de polietileno para su programa de natación en verano. La firma posee 10 máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 tablas por hora. El costo de puesta a punto de las máquinas para producir las tablas es de \$200 por máquina. Una vez puestas a punto las máquinas, la operación es totalmente automática y puede ser controlada por un único supervisor de producción, que gana \$400 pesos por hora.

— ¿Cuántas máquinas deberían usarse para minimizar el costo de producción?

— ¿Cuánto ganará el supervisor durante la marcha de producción si se usa el número óptimo de máquinas?

— ¿Cuánto costará poner a punto el número óptimo de máquinas?

j) Un comerciante ha comprado varias cajas de cierto vino importado. Cuando el vino envejece, su valor crece, pero finalmente el vino pasará su mejor momento y su valor decrecerá. Suponga que dentro de x años, el valor de una caja habrá cambiado a un ritmo de $1530-20x$ pesos por año y que las tasas de almacenaje permanecerán fijas a \$350 pesos por caja por año. ¿A qué precio debería vender el vino el comerciante para obtener el mayor beneficio posible?

k) Un fabricante recibe materiales en bruto en cargamentos iguales que llegan a intervalos regulares a lo largo del año. El costo de almacenaje de los materiales en bruto es directamente proporcional al tamaño de cada cargamento, mientras que el costo total de pedido anual es inversamente proporcional al tamaño del cargamento. Demuestre que el costo total será el menor si el tamaño de los cargamentos es tal que el costo de almacenaje y el costo de pedido son iguales.

l) Un granjero quiere construir un corral rectangular y dividirlo por una valla paralela a uno de los lados. Dispone de 240 pies de valla. Halle las dimensiones del corral de área máxima que puede construir.

ll) Halle dos números no negativos de suma 1 que hagan máximo el producto del cuadrado de uno por el cubo del otro.

m) La longitud y el contorno de un paquete que ha de enviarse por correo no puede sobrepasar en total las 100 pulgadas. Halle las dimensiones admisibles en correos para un cilindro circular recto de máximo volumen posible.

n) Un rectángulo tiene un perímetro de 100 pies. ¿Qué longitud y anchura habría de tener para que su área fuera máxima?

o) El consultorio de un médico es una habitación rectangular con un semicírculo en cada extremo. Si la habitación ha de tener un perímetro de 200 m, halle las dimensiones que harán el área de la región rectangular lo mayor posible.

p) Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante está formado por los ejes X y Y y una recta que pasa por el punto (2, 3). Halle los vértices del triángulo para que su área sea mínima.

q) Una compañía estima que el costo (en pesos) para producir x unidades de un cierto producto viene dado por

$$C = 800 + 0.04x + 0.0002\,x^2$$

Halle el nivel de producción que minimiza el costo medio por unidad. Compare este costo medio mínimo con el costo medio cuando se producen 400 unidades.

r) En la promoción de cierto artículo un fabricante ha descubierto que la demanda viene dada por $x = \dfrac{2500}{p^2}$. Suponiendo que el ingreso total R viene dado por $R = x\,p$ y que el costo de producir x artículos está dado por $c = 0.5x + 500$, halle el precio por unidad que da un beneficio máximo.

s) Dada la función de costo $c = x^3 - 6x^2 + 13x$.

— Halle el valor de x para el cual la función de costo medio es mínima.

— Para el valor de x hallado anteriormente, pruebe que el costo marginal y el costo medio son iguales.

3. Resuelva los siguientes ejercicios sobre variables relacionadas (razón de cambio).

a) Un hombre de 170 cms de estatura camina a razón de 4 km por hora, alejándose de una fuente de luz situada a 4 m de altura.

— ¿A qué velocidad se alarga su sombra?

— ¿A qué velocidad se aleja el extremo de la sombra de la base de la luz?

b) Un hombre de pie sobre un muelle hala de una cuerda para acercar un bote hacia la base del muelle. La fuerza se aplica a 10 m de altura. ¿A qué velocidad se aproxima el bote a la base del muelle cuando está a una distancia de 15 m de ésta, si el hombre hala la cuerda a razón de 3 m por segundo?

c) En una planta de arena y grava, la arena está cayendo de una cinta transportadora formando una pila cónica a razón de $10\ \dfrac{\text{pies}^3}{\text{min}}$. El diámetro de la base del cono es aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón está cambiando la altura de la pila cuando tiene 15 pies de altura?

d) Una cubeta tiene 12 pies de largo y 3 pies de anchura en su parte superior, sus extremos son triángulos isósceles de 3 pies de altura. Si el agua cae en la cubeta a $2\,\dfrac{\text{pies}^3}{\text{min}}$, ¿a qué velocidad está subiendo el nivel del agua cuando tiene 1 pie de profundidad?

e) Al caer una gota esférica de lluvia, alcanza una capa de aire más seco en los niveles más bajos de la atmósfera y comienza a evaporarse. Si esta evaporación se produce a una velocidad proporcional al área de la superficie ($s = 4\pi r^2$) de la gota, pruebe que el radio se contrae a velocidad constante.

f) La arista de un cubo se expande a razón de $3\,\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$. ¿A qué velocidad cambia el volumen cuando cada arista tiene 1 cm y 10 cms?

g) Un punto se mueve sobre la curva $y = x^2$ de forma que $\dfrac{dx}{dt}$ vale $2\,\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

Halle $\dfrac{dy}{dt}$ cuando:

$x = 0$

$x = 3$

h) Un punto se mueve sobre la curva $y = \dfrac{1}{(1 + x^2)}$ de modo que $\dfrac{dx}{dt} = 2\,\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

Halle $\dfrac{dy}{dt}$ cuando:

$x = -2$

$x = 2$

$x = 0$

$x = 10$

4. Halle la ecuación de una recta tangente a la curva $y = x^3$ y paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$.

5. Halle la ecuación de una recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ y paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$.

6. Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$. Halle las ecuaciones de tales rectas y represéntelas gráficamente para comprobar el resultado.

7. Existen dos rectas tangentes a la curva $y = x^2$ que pasan por el punto $(1, -3)$. Halle las ecuaciones de tales rectas y represéntelas gráficamente para comprobar el resultado.

CAPITULO 14

La integral

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Calcular la integral de algunas funciones utilizando las reglas apropiadas.
2. Calcular el área bajo una curva dada.
3. Calcular el área entre dos curvas.
4. Calcular la probabilidad, dada una función de probabilidad continua.

14.1 Introducción

En los dos capítulos anteriores estudiamos el concepto más importante del cálculo diferencial: la derivada. En este capítulo haremos una introducción al segundo concepto importante del cálculo: la integral.

Aunque Newton y Leibniz dieron una versión de la integral y la utilizaron para el cálculo de áreas, fue George Friedrich Riemann (1826-1866) quien proporcionó una definición exacta de integral.

En este capítulo estudiaremos la relación existente entre la derivada y la integral, y utilizaremos el concepto de integral para el cálculo de áreas bajo una curva y algunas otras aplicaciones a la física y la economía. Omitiremos el método utilizado por Arquímides (287-212 A.C.) para la obtención del área de algunas regiones planas, y tema obligatorio de casi todos los textos.

El objetivo de este capítulo no es enseñar a integrar, sino mostrar la relación existente entre la derivada y la integral, y algunas aplicaciones de esta última.

14.2 Antiderivada

En los dos capítulos anteriores trabajamos con la definición de derivada y sus posibles aplicaciones, y resolvimos el problema "dada una función $f(x)$ hallar su derivada, $f'(x)$".

Esta sección, y una parte de este capítulo, la dedicaremos al problema inverso: "Dada una función $f(x)$, hallar una función $F(x)$ tal que, $F'(x) = f(x)$". Llamamos a $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$.[38]

[38] Una antiderivada se llama también *primitiva*.

Ejemplo 1

Si $f(x) = 3x^2$, entonces $F(x) = x^3$ es una antiderivada de $f(x)$, ya que $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Definición de antiderivada
Se dice que una función F es una antiderivada de una función f, si para todo x en el dominio de f,

$$F'(x) = f(x)$$

Observe que en la definición se dice que F es una antiderivada y no la antiderivada. El siguiente ejemplo ilustra tal diferencia.

Ejemplo 2 Sea $F(x) = 3x^8$ y $G(x) = 3x^8 + 4$

En este caso, $F'(x) = 24x^7$ y $G'(x) = 24x^7$, por lo que $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función $f(x) = 24x^7$.

En general, una función de la forma

$$H(x) + 3x^8 + c, \qquad c = cte,$$

será una primitiva de la función $f(x) = 24x^7$. El anterior ejemplo puede generalizarse en el siguiente teorema:

Teorema 1

Si F es una antiderivada de una función f, entonces $G(x) = F(x) + c$, con $c = cte$ es también una antiderivada de f.

La función de $G(x) = F(x) + c$ en el teorema anterior, permite encontrar la familia de antiderivadas de una función, sumando una constante a una antiderivada conocida.

Por ejemplo, como $\dfrac{d}{dx}(6x^4) = 24x^3$, $F(x) = 6x^3$, por tanto, $G(x) = 6x^4 + c$, $c = cte$ representa la familia de todas las antiderivadas de la función $f(x) = 24x^3$.[39]

Se dice también que la función $G(x) = 6x^4 + c$ es la solución general de la ecuación

$$f(x) = G'(x) = 24x^3$$

[39] En algunos libros, a la función $G(x)$ se le denomina la antiderivada general de la función $f(x)$.

o simplemente

$$\frac{dG}{dx} = 24x^3$$

En forma general, si $y = F(x)$ es una antiderivada de f, entonces $F(x)$ es una solución de la ecuación

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)}$$

La ecuación anterior se denomina ecuación diferencial[40] y nuestro objetivo al resolverla es encontrar el valor de la función $F(x) = y$ que la satisface.

Para resolver la anterior ecuación que se denomina de variables separables, primero se escribe ésta de la siguiente manera

$$dy = f(x)\,dx$$

La "operación" que permite encontrar todas las soluciones de esta ecuación, se denomina integración, y se representa así:

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

En general, $\int f(x)\,dx$, representa la operación que permite encontrar una antiderivada de $f(x)$, luego:

$$\int dy = y + c_1$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c_2$$

por tanto $\quad y + c_1 = F(x) + C_2$

$$y = F(x) + c_2 - c_1$$

$$y = F(x) + c$$

Ejemplo 3

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 2x$$

separando las variables,

$$dy = (5x^4 + 2x)\,dx,$$

luego, integrando en ambos miembros

$$\int dy = \int (5x^4 + 2x)dx$$

$$y = x^5 + x^2 + c$$

[40] Una ecuación diferencial es una ecuación en la que la incógnita, en este caso la función F, aparece dentro de una derivada.

Al proceso de encontrar la antiderivada de una función por medio de la "operación" integración, se le denomina *integrar*; éste es uno de los procesos más complicados del cálculo, pero nosotros trabajaremos con funciones cuya integral es fácil de calcular.

14.3 Integrales definidas

La relación entre antiderivadas de una función y la integral, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x)dx = F(x) + c, \text{ si, y solamente si, } F'(x) = f(x)}$$

En la ecuación anterior, la expresión a la izquierda de la igualdad se denomina la integral indefinida de f, $f(x)$ se denomina el integrando y dx indica que x es la variable de integración; mientras que en la expresión de la derecha c se llama la constante de integración.

Ejemplo 4

$$\int 4x^3\, dx = x^4 + c$$

$4x^3$: Integrando

dx : Indica que estamos integrando una función cuya variable es x.

c : Constante de integración.

$x^4 + c$: Antiderivada general de la función $4x^3$.

A continuación figuran distintas fórmulas para encontrar las integrales (antiderivadas) de algunas funciones:

Algunas fórmulas para integrar

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

Las fórmulas anteriores se obtienen teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x + c) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$$

Ejemplos

1. $$\int x^4\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}$$

$$= \frac{x^5}{5} + c$$

2. $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

3. $$\int \frac{1}{x^4}\, dx = \int x^{-4}\, dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1}$$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3}x^{-3} + c$$

Las siguientes propiedades nos permitirán calcular integrales de otras funciones "más complicadas":

Reglas de integración
$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$, a constante
$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Ejemplos

1. $$\int 3x^{-2}\, dx = 3\int x^{-2}\, dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1}$$

$$= \frac{3\,x^{-1}}{-1}$$

$$= -3x^{-1} + c$$

2. $$\int (2x + x^3)dx = \int 2x\,dx + \int x^3\,dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

$$= x^2 + \frac{1}{4}x^4 + c$$

3. $$\int \left(3\,e^x + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int 3e^x\,dx + \int \frac{4}{x^2}dx$$

$$3\int e^x\,dx + 4\int x^{-2}\,dx = 3e^x + \frac{4\,x^{-1}}{-1}$$

$$= 3e^x - 4x^{-1} + c$$

Las anteriores integrales se realizaron en forma casi inmediata aplicando las fórmulas estudiadas. Esto no significa que integrar sea un procedimiento fácil de realizar; por el contrario, es tal vez uno de los más difíciles. El cálculo de integrales más complejas está fuera de los objetivos de este libro.

14.4 Integrales definidas y el área bajo una curva

La integral representa el área bajo una curva. Dada una función $f(x)$ y un par de rectas $x = a$ y $x = b$, *véase* Figura 14.1, entonces el área sombreada se representa mediante:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

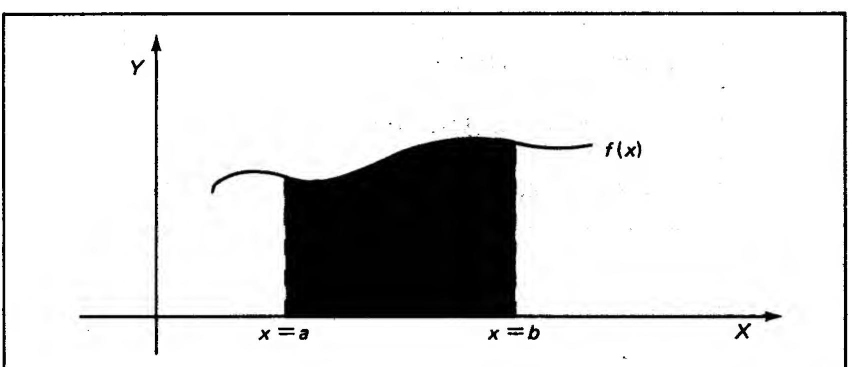


Figura 14.1

La expresión $\int_a^b f(x)\, dx$ se denomina integral definida de f entre a y b, siendo a y b límite inferior y límite superior de la integral, respectivamente.

El cálculo de una integral definida se realiza mediante la siguiente definición:

> **Definición de integral definida**
>
> Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces,
>
> $$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Ejemplos

1. $\displaystyle\int_2^4 (2x^5 + 3)dx$

$$\int_2^4 (2x^5 + 3)dx = \int_2^4 2x^5\, dx + \int_2^4 3dx$$

$$= \frac{x^6}{3}\Bigg|_2^4 + 3x\Bigg|_2^4$$

$$= \frac{4^6}{3} - \frac{2^6}{3} + (3\cdot 4 - 3\cdot 2)$$

$$= \frac{4096 - 64}{3} + (12 - 6)$$

$$= \frac{4032}{3} + 6$$

$$= 1344 + 6$$

$$= 1350$$

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x + x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int_1^3 \frac{x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^3 \frac{x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int_1^3 \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + \int_1^3 \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_1^3 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^3 + \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_1^3$$

$$= \left[\frac{3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + \left[\frac{3^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{27}-2}{3} + \frac{2\sqrt{243}}{5} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2(\sqrt{27}-1)}{3} + \frac{2(\sqrt{243}-1)}{5}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1) + \frac{2}{5}(9\sqrt{3}-1)$$

3. Calcule el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 3$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
Como dijimos anteriormente, la integral definida representa el "área bajo una curva", luego

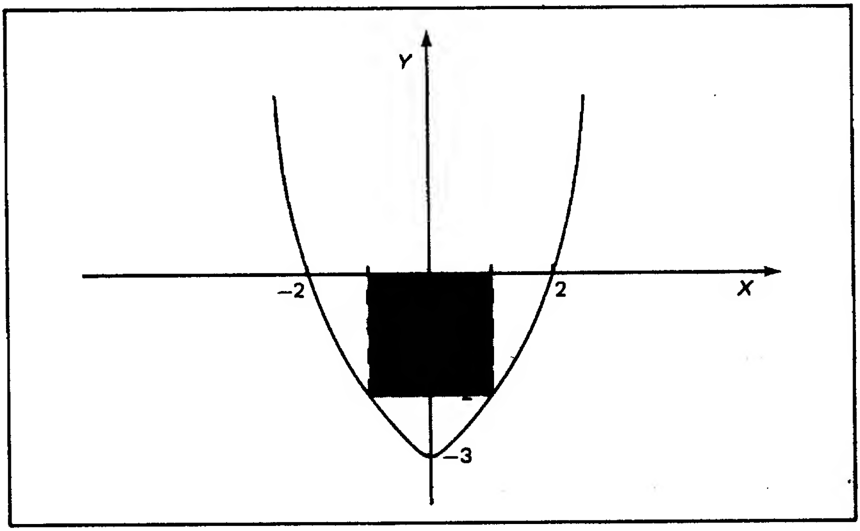
$$\text{Area} = \int_{-1}^{1} (x^2-3)dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - \int_{-1}^{1} 3dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} - \left.3x\right|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1^3 - (-1)^3}{3} - 3\,(1 - (-1)\,)$$

$$= \frac{2}{3} - 3(2) = - \frac{16}{3}$$

La gráfica muestra el área bajo la curva.



De acuerdo a la figura, el significado de "área bajo una curva" es realmente el área entre la curva y el eje X. Dependiendo del lugar donde está situada podría ser positiva o negativa. El signo representa la ubicación del área.

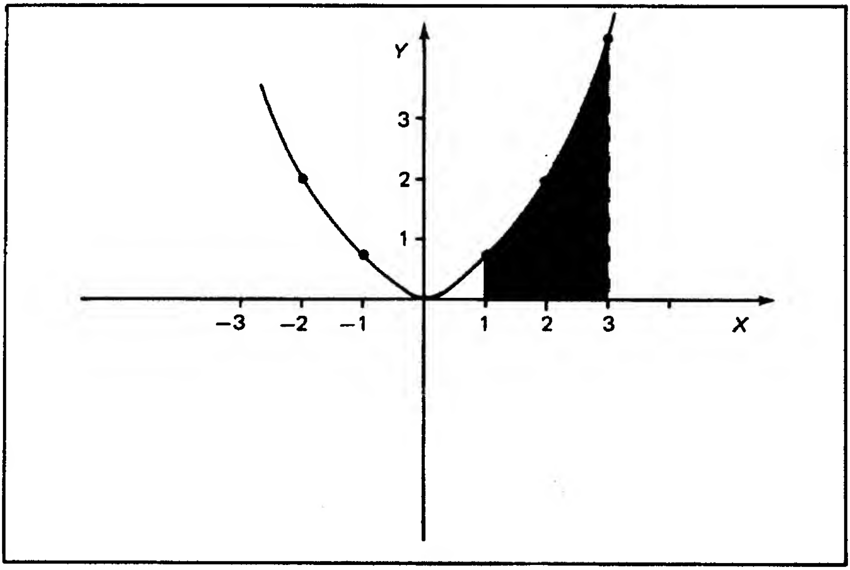
4. Calcule el área bajo la curva $f(x) - \frac{x^2}{2}$ entre $x = 1$ y $x = 3$

$$\text{Area} = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3^3 - 1^3}{3}\right] = \frac{1}{2} \quad \frac{26}{3} = \frac{13}{3}$$

La gráfica muestra el área bajo la curva.



5. Calcule el área bajo la curva $f(x) = x^3 + 2x - 1$ entre $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 1$.

$$\text{Area} = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^3 + 2x - 1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} x^3\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2x\, dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 1\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1} + \frac{2x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1} - x\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{2\left((1)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{2} - \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

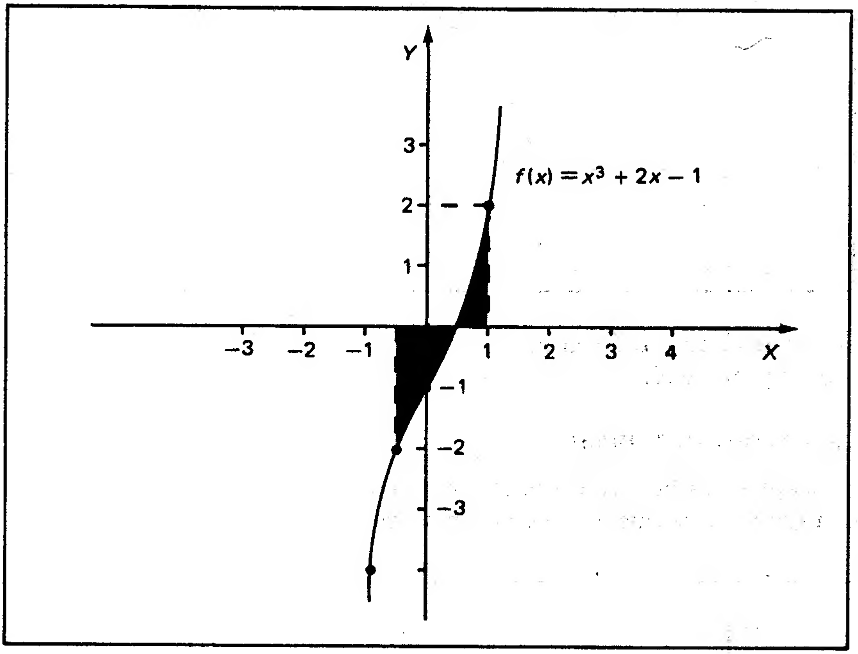
$$= \frac{1 - \frac{1}{16}}{4} + 1 - \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{15 + 48 - 96}{64}$$

$$= \frac{-33}{64}$$

La gráfica muestra el área bajo la curva.



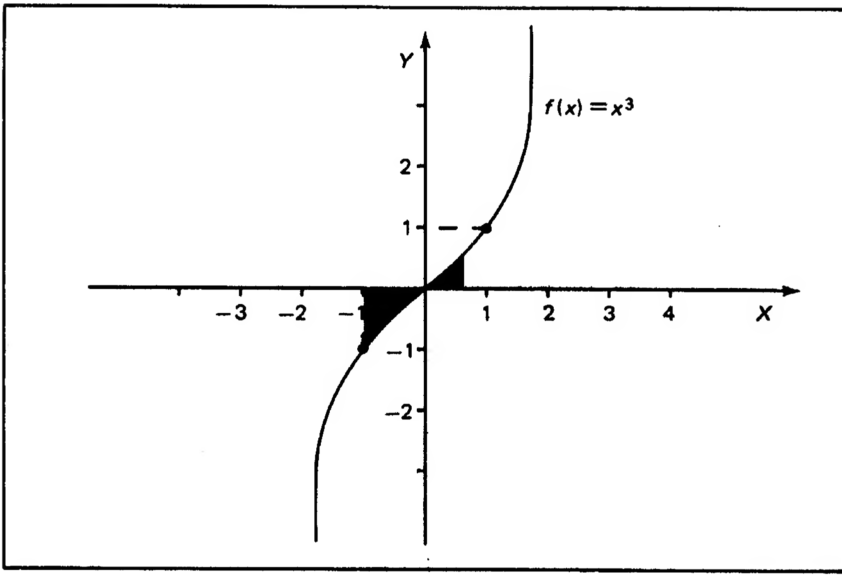
Como se observa en la figura la parte por encima del eje X es más grande que la parte que se encuentra bajo el eje X, luego el área total es positiva.

6. Calcule el área bajo la curva $f(x) = x^3$ entre $x = -1$ y $x = \dfrac{1}{2}$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^3 \, dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - (-1)^4}{4} \quad \frac{\frac{1}{16} - 1}{4} = -\frac{15}{64}$$

La gráfica muestra el área bajo la curva.



En este caso el área bajo la curva y el eje X es menor que el área por encima de la curva y el eje X.

14.5 Area entre dos curvas

Los conceptos de la sección anterior pueden extenderse para calcular el área de una región entre dos curvas, como se muestra en la Figura 14.2.

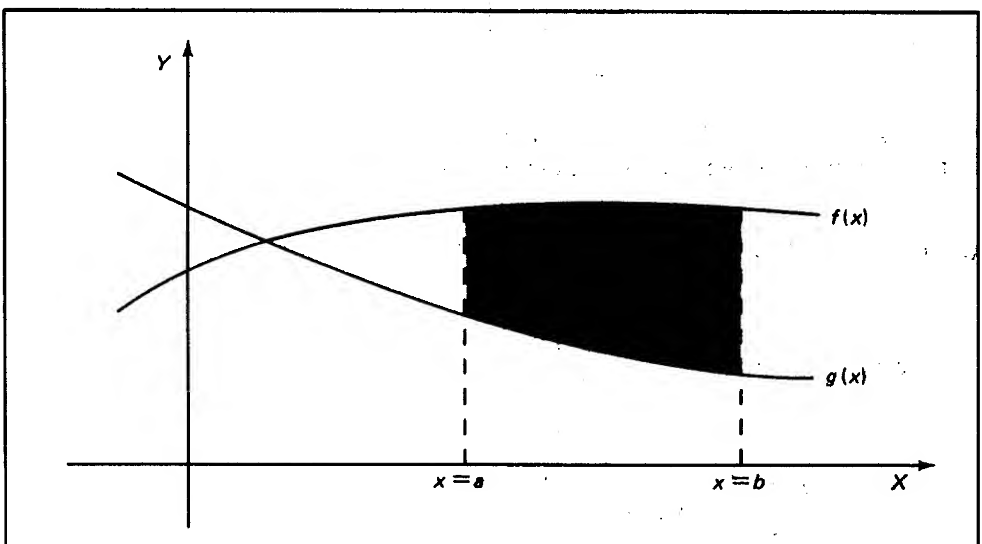


Figura 14.2

La siguiente definición permite encontrar el área nombrada en la figura.

Definición

Area entre dos curvas:

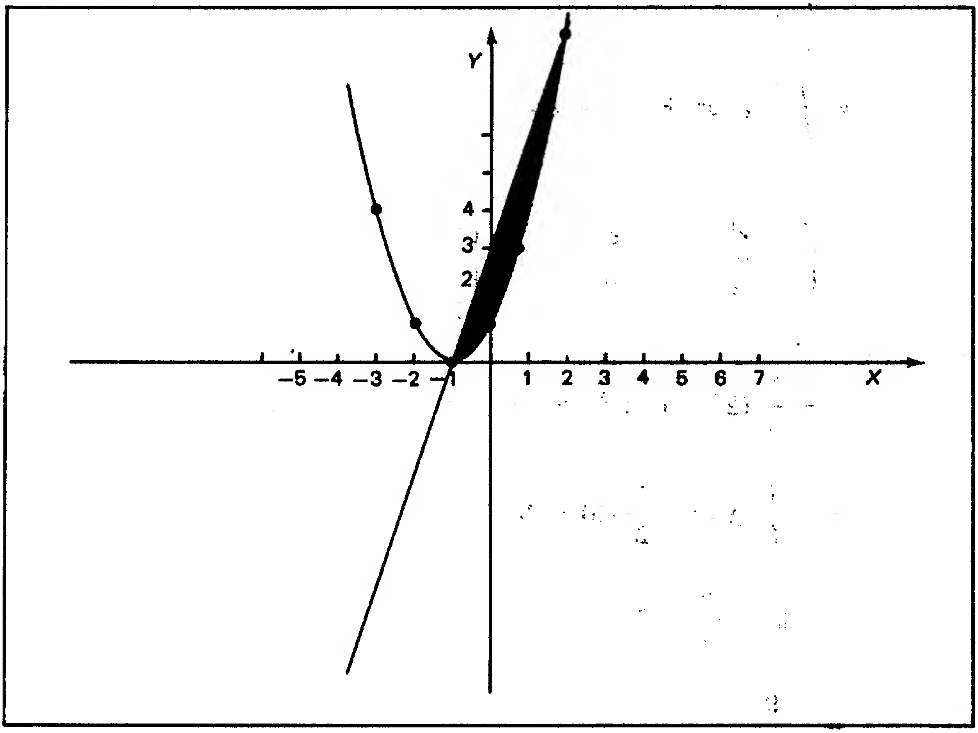
Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por $f(x)$ y $g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Ejemplos

1. Calcule el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x + 3$.

   La siguiente figura muestra la región cuya área se quiere calcular.



Inicialmente debemos encontrar el punto de corte de las gráficas; para ésto igualamos las funciones dadas y resolvemos la ecuación así obtenida:

$x^2 + 2x + 1 = 3x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$

$x = -1$

Como la función $g(x) = 3x + 3$ es mayor que $f(x) = x^2 + 2x + 1$, entre $x = -1$ y $x = 2$ entonces el área es:

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(3x + 3) - (x^2 + 2x + 1)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (3x + 3 - x^2 - 2x - 1)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) + 2(2 - (-1))$$

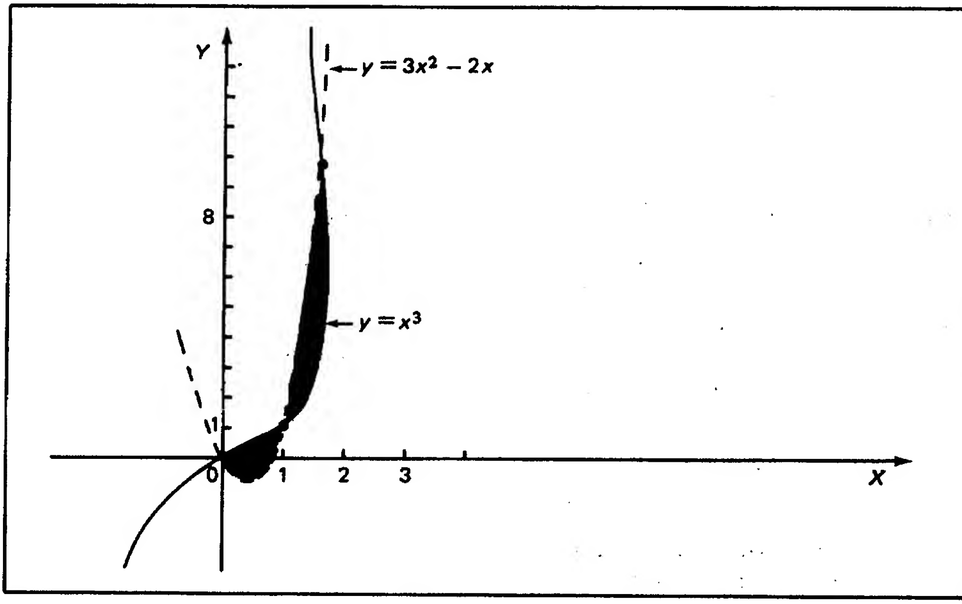
$$= -\frac{1}{3}(9) + \frac{1}{2}(3) + 2(3)$$

$$= -3 + \frac{3}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2}$$

2. Calcule el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x^2 - 2x$.

La siguiente figura muestra el área entre las curvas que se quiere calcular.



Inicialmente encontramos el punto de corte de las dos gráficas así:

$x^3 = 3x^2 - 2x$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x - 2)(x - 1) = 0$

Luego los puntos de corte son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Como se observa en la gráfica anterior entre 0 y 1, la función $y = x^3$ se encuentra situada por encima de la función $y = 3x^2 - 2x$, pero en el intervalo de 1 a 2 la situación es contraria, luego el área viene dada por:

$$A = \int_0^1 [x^3 - (3x^2 - 2x)]\,dx + \int_1^2 [3x^2 - 2x - (x^3)]\,dx$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (3x^2 - 2x - x^3)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2$$

$$\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Bigg|_0^1 + x^3 - x^2 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2$$

$$\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(0)+\left(2^3-2^2-\frac{2^4}{4}\right)-\left(1-1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

14.6 Funciones de densidad (probabilidad continua)

Cuando se trabaja con distribuciones de probabilidad continua, la probabilidad se interpreta como un área, por esta razón calcular probabilidades es equivalente a calcular áreas.

Para calcular la probabilidad en un determinado intervalo debemos tener en cuenta el concepto de función de probabilidad continua, que damos en la siguiente definición:

> Definición de función de probabilidad continua:
>
> Se dice que una función f es de probabilidad continua en un intervalo $[a, b]$ si:
>
> a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x en $[a, b]$
>
> b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Ejemplos

1. Muestre en el intervalo $[0, 1]$ que la función $f(x) = 2x$ es de probabilidad continua.
   Para verificar que $f(x) = 2x$ es de probabilidad continua, debemos mostrar que se cumplen las dos condiciones de la definición.

a) Es claro que en el intervalo $[0, 1]$, $f(x) = 2x$ es mayor que cero.

b) $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

luego la función es efectivamente una función de probabilidad continua.

2. Encuentre el valor de k para que en el intervalo $[1, k]$, $f(x) = 8x + 3$ sea una función de probabilidad continua.

a) Nuevamente es claro que en el intervalo $[1, k]$, $f(x) = 8x + 3 \geqslant 0$, luego

b) k debe satisfacer la siguiente condición:

$$\int_1^k (8x+3)dx = \frac{8x^2}{2} + 3x\Big|_1^k = 1$$

$$4x^2 + 3x \Big|_1^k = 1$$

$$(4k^2 + 3k) - 7 = 1$$

$$4k^2 + 3k - 8 = 0$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4(4)(8)}}{8}$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 128}}{8}$$

$= \dfrac{-3 \pm 11.7}{8}$, luego los posibles valores de k son:

$$k_1 = -1.8375$$

$$k_2 = 1.088$$

El único valor de k a considerar es el valor positivo, ya que en el intervalo $[-1.8375, 1]$, $f(x)$ sería negativo.

Cuando se tiene una función de probabilidad continua que depende en un intervalo $[a, b]$, el cálculo de la probabilidad se realiza mediante la siguiente definición:

Definición:

Si $f(x)$ es una función de probabilidad continua definida en un intervalo $[a, b]$ entonces la probabilidad de una variable x en el subintervalo $[c, d]$ se calcula así:

$$P(c \leqslant x \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = \dfrac{4}{15}x^3$ definida en el intervalo $[1, 2]$, calcule $P\left(\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$.
   Según la definición:

$$P\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{4}{15}x^3\,dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{15}\right|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{15} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{15}$$

$$= 3.34 \times 10^{-3}$$

2. Si $f(x) = \frac{3}{26}(x^2 + 3x)$ definida en el intervalo $[0, 2]$, calcule $P\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right)$.

Aplicando la definición:

$$P\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{3}{26}(x^2 + 3x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{3}{26} x^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{3}{26}(3x)\, dx$$

$$= \left.\left[\frac{x^3}{26} + \frac{9x^2}{52}\right]\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{26} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{26} + \frac{9\left(\frac{3}{2}\right)^2}{52} - \frac{9\left(\frac{1}{2}\right)^2}{52}$$

$$= 0.125 + 0.3103$$

$$= 0.4353$$

14.7 Otras aplicaciones

Ejemplo 5

Cerca de la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad es de $g = 9.8\ \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$. Si un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial $V_o = 49\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, desde un edificio de 40 m, ¿cuál es la velocidad y la altura a la que se encuentra 3 segundos más tarde?

Solución:

Como el objeto inicialmente está subiendo, la aceleración es negativa,

si $a = \dfrac{dv}{dt}$, entonces

$$\frac{dv}{dt} = -9.8$$

$dv = -9.8\,dt$, integrando se tiene que

$$\int dv = \int -9.8\,dt$$

$$v = -9.8t + c$$

El valor de la constante c puede obtenerse de la condición $V(t = 0) = 49$, luego

$$49 = 9.8(0) + c$$

$c = 49$, por tanto,

$$v = -9.8t + 49.$$

por lo que $V(t = 3) = -9.8(3) + 49$

$$V(t = 3) = 19.6\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

ahora, como $V = \dfrac{ds}{dt}$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 49$$

$$ds = (-9.8t + 49)dt$$

$$\int ds = \int(-9.8t + 49)dt$$

$$s = \frac{-9.8\,t^2}{2} + 49t + c$$

$$s = -4.9\,t^2 + 49t + c$$

como en el caso anterior,

$$s(t = 0) = 40 = -4.9(0)^2 + 49(0) + c$$

luego $c = 40$, entonces

$$s = -4.9t^2 + 49t + 40,$$

$$s(t = 3) = -4.9\,(3)^2 + 49(3) + 40$$

$$s(t = 3) = 142.9 \text{ m}.$$

Ejemplo 6

Ley del enfriamiento de Newton

La ley del enfriamiento de Newton dice que la razón a la que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio ambiente A, y la temperatura del cuerpo T, esto es,

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T)$$

Si un cuerpo se saca de un horno a 100° C, ¿cuál es su temperatura después de 2 horas, si en la primera media hora el cuerpo tiene una temperatura de 50° C? La temperatura del medio ambiente es de $A = 25°$ C.

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(25 - T)$$

$$\frac{dT}{25 - T} = k\,dt$$

$$- \int \frac{dT}{T - 25} = k\,dt$$

$$- \ln\,(T - 25) = k\,t + c$$

Según las condiciones del problema, para $t = 0$, $T = 100$, luego

$$C = -\ln\,(100 - 25), \text{ entonces}$$
$$- \ln\,(t - 25) = kt - \ln\,(75)$$

como para $t = 0.5$ (horas), $T = 50$,

$$- \ln\,(50 - 25) = k(0.5) - \ln(75)$$
$$\ln 75 - \ln 25 = k(0.5)$$
$$\ln \frac{75}{25} = \frac{k}{2}$$
$$k = 2 \ln 3, \text{ luego}$$
$$- \ln\,(T - 25) = (2 \ln 3)t - \ln 75$$

para $t = 2$, la temperatura T, será:

$$-\ln\,(T - 25) = (2 \ln 3)2 - \ln 75$$
$$\ln\,(T - 25) = \ln 75 - 4 \ln 3$$
$$\ln\,(T - 25) = \ln 75 - \ln 81$$

$$ln\,(T-25) = ln\frac{75}{81}$$

$$T-25 = \frac{75}{81}$$

$$T = 25 + 0.926$$

$$T = 25.926$$

Ejemplo 7

Crecimiento bacteriano

Una colonia de bacterias crece en forma proporcional a la cantidad presente de bacterias en un instante de tiempo t; ésto es, si B representa la cantidad de bacterias, entonces

$$\frac{dB}{dt} = k\,B$$

Suponga que un individuo es atacado por una sola bacteria que se duplica cada quince minutos. ¿Cuántas bacterias tendrá el individuo infectado después de ocho horas?

Solución:

Como $\quad \dfrac{dB}{dt} = k\,B$

$$\int\frac{dB}{B} = \int k\,dt$$

$$ln\,B = k\,t + C$$

Como para $t = 0$ (momento inicial), $B = 1$, entonces

$$ln\,\cancelto{0}{1} = k(0) + c$$

$$c = 0\text{, luego}$$

$$ln\,B = k\,t$$

como para $t = 0.25$ (un cuarto de hora), $B = 2$, entonces

$$ln\,2 = k\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$k = 4\,ln\,2,$$

$$k = ln\,2^4$$

$$k = ln\,16\text{, luego}$$

$$ln\,B = (ln\,16)t,$$

Para $t = 8$,
$$\begin{aligned} \ln B &= (\ln 16)(8) \\ \ln B &= \ln 16^8 \\ B &= 16^8 \\ B &= 4{,}294{,}967{,}295 \text{ bacterias} \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Determinación de la edad por medio del carbono 14[41]

Teniendo en cuenta que la vida media del carbono 14 es de unos 5700 años, se tiene que la variación de la cantidad de carbono 14 con respecto al tiempo es:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{5700} \ln \frac{1}{2}\right) y$$

$$\frac{dy}{dt} = (-0.0001216)\, y$$

¿Qué edad tiene un objeto en el que se ha desintegrado el 95% del carbono 14?

Como
$$\frac{dy}{dt} = (-0.0001216)\, y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-0.0001216)dt$$

$$\ln y = -0.0001216\, t + c$$

Si para $t = 0$, la cantidad presente era del 100%, entonces

$$\ln 1 = (-0.0001216)(0) + C,$$

luego $c = 0$, entonces

$$\ln y = 0.0001216\, t$$

para $y = 0.05$ (5%, ya que se ha desintegrado el 95%),

---

[41] Con el método del carbono 14 se puede determinar la fecha en que ocurrió un hecho de la prehistoria y la edad de ciertos objetos "relativamente nuevos" (de menos de 50,000 años).

El carbono 14 hace parte de la composición química de todo ser vivo (al igual que el carbono ordinario). Se fija en las plantas por fotosíntesis, y en los animales y el hombre se hace presente cuando se alimentan de ellas. Al morir los organismos vivos, la cantidad de carbono 14 empieza a disminuir con respecto a la del carbono ordinario. La técnica consiste en determinar la relación entre estas dos cantidades, lo cual permite con un error del 5% al 10%, encontrar la edad del objeto en cuestión.

$$ln\ (0.05) = -0.0001216t$$

$$t = \frac{ln\ (0.05)}{-0.0001216} =$$

$$t = 24{,}635{,}9 \text{ años}$$

Ejemplo 9

Costo marginal

El costo marginal de producir x artículos viene dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dc}{dx} = 10x^3 + 60x^2 + 150x - 200$$

Si los costos fijos son de \$150,000, ¿cuánto cuesta producir $x = 20$ artículos?

Solución:

Como $$\frac{dc}{dx} = 10x^3 + 40x^2 + 150x - 200$$

$$\int dc = \int (10\,x^3 + 60x^2 + 50x - 200)\,dx$$

$$c = \frac{10\,x^4}{4} + \frac{60x^3}{3} + \frac{50x^2}{2} - 200x + c$$

$$c = \frac{5x^4}{2} + 20x^3 + 25x^2 - 200x + c$$

como para $x = 0,\ c = c_f = \$150{,}000$

$$C(x) = \frac{5x^4}{2} + 20x^3 + 25x^2 - 200x + 150{,}000$$

$$c(x = 20) = 400{,}000 + 160{,}000 + 10{,}000 - 4{,}000 + 150{,}000$$

$$c(x = 20) = 716{,}000$$

14.8 Resumen

Recuerde que:

1. Una función F es una antiderivada de una función f si para todo $x \in D_f$

$$F'(x) = f(x)$$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq -1$

$$\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + c$$

$$\int e^x\ dx = e^x + c$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx, \quad a \text{ constante}$$

$$\int [f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

3. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

4. La integral representa el área bajo la curva.

5. Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leqslant f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por $f(x)$ y $g(x)$, entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

6. Se dice que una función f es de probabilidad continua en un intervalo $[a, b]$ si:

a) $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$

b) $\int_a^b f(x)\ dx = 1$

7. Si $f(x)$ es una función de probabilidad continua definida en $[a, b]$ entonces la probabilidad de una variable x en el subintervalo $[c, d]$ se calcula así:

$$P(c \leqslant x \leqslant d) = \int_c^d f(x)\ dx$$

14.9 Ejercicios y problemas de aplicación

1. Calcule la antiderivada general de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 2$

b) $f(x) = (x - 2)^3$

c) $f(x) = (3x + 5)^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = x\ e^{3x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{5x}$

g) $f(x) = 6x\sqrt{3x^2 + 5}$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dt} = t^2 + 3t$, si para $t = 0$, $y = 2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy^3}$, si para $x = 0$, $y = 3$

c) $\dfrac{dy}{dx} = (x^3 - \sqrt{x^5})y^3$, si para $x = 4$, $y = 0$

d) $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2 - 4}$, si para $t = 1$, $y = 0$; $t > \dfrac{1}{t}$

e) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = 3t + 2$, si para $t = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 2$, $y = 4$

3. Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int (x + 2)^3 \, dx$

b) $\int \dfrac{x - 8}{x^2} \, dx$

c) $\int \dfrac{3x}{x + 2} \, dx$

d) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x}}$

e) $\int_1^3 (3x^2 + 5x^{-2})dx$

f) $\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx$

g) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 5) \, dx$

4. Halle el área de la región limitada por:

a) La gráfica de $f(x) = (x-3)^2$, el eje X, desde $x = 0$ hasta $x = 3$

b) La gráfica de $f(x) = x^3 + x$, el eje X desde $x = 1$ hasta $x = 4$

c) La gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ y la recta $y = 2$, entre $x = 3$ y $x = 5$

d) La gráfica de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ y de $g(x) = x^2 + 3$

e) La gráfica de $f(x) = x^{-2} + x$, $y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 2$

5.

a) Halle el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = 3 - 2x$ y el eje X

b) Obtenga el área anterior utilizando métodos geométricos.

6. Resuelva los siguientes problemas:

a) Desde el suelo se dispara un proyectil hacia arriba con una velocidad inicial $V_o = 50\dfrac{\text{m}}{\text{seg}}$. Halle la velocidad después de $t = 2$ seg y la altura a la que se encuentra el proyectil en ese momento. ¿Cuál es la altura máxima a la que sube el proyectil?

b) Resuelva el problema anterior si la atracción de la gravedad es $g = 3.7 \dfrac{\text{m}}{\text{seg}^2}$, y la velocidad inicial es $V_o = 20 \dfrac{\text{m}}{\text{seg}}$.

7. Halle la función f que satisface las siguientes características: en cualquier punto la pendiente es $m = 2x^{\frac{3}{2}}$ y pasa por el punto $(2, 4)$.

8. Halle el valor de k de tal forma que:

a) La función $f(x) = k\,x^2 + x$ en $[0, 2]$ sea una función de probabilidad.

b) La función $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{10}$ en $[0, k]$ sea una función de probabilidad.

c) Halle $P(0 \leqslant x \leqslant 1)$ para la función definida en 8 a).

d) Halle m, de tal forma que $P(0 \leqslant x \leqslant m) = \dfrac{1}{2}$ para la función $f(x) = x^2 + x$.

9. Un bizcocho es sacado de un horno con una temperatura inicial de $T_o = 80°$C. Si la temperatura ambiente es $A = 20°$C y en un cuarto de hora el bizcocho se enfría hasta $T = 50°$C, ¿cuánto tiempo debe pasar hasta que la temperatura del bizcocho se reduzca hasta $T = 25°$C?

10. Un termómetro marca inicialmente una temperatura $T_o = 18$; 30 segundos después marca una temperatura de 11°C, y 30 segundos más tarde, una temperatura de 6°C. ¿Cuál es la temperatura del medio ambiente?

11. Suponga que una población inicial de 30 moscas de la fruta se multiplica en forma proporcional a la cantidad de moscas presente en un instante dado. Si un día después hay 95 moscas,

a) ¿Cuántas moscas habrá 5 días después?

b) ¿Cuántos días transcurrirán hasta que el número de moscas sobrepase las 10,000?

12. La vida media del uranio radioactivo es de 4500 millones de años.

a) Después de 1000 millones de años, ¿cuánto quedará si se tienen inicialmente 2 gramos de uranio radioactivo?

b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que se desintegre un 80% de uranio radioactivo?

13.

a) El costo marginal por unidad cuando se producen x unidades es $C'(x) = 6x^2 + 2x + 3$. El costo total para producir 10 unidades es \$494,000. ¿Cuánto cuesta producir 20 unidades?

b) Un fabricante estima que el ingreso marginal por unidad al vender x unidades es $R'(x) = \dfrac{100}{x^2} + 400x$, si el costo marginal correspondiente es $C'(x) = 150x$. Si la utilidad es producir y vender 10 unidades es de \$197,600, ¿cuál es la utilidad al producir y vender 30 unidades?

14. La utilidad marginal de cierta fábrica es $U'(x) = 384{,}000 - 2x$ por unidad al producir y vender x unidades. Si la utilidad al producir y vender 10 unidades es \$268,000, ¿qué utilidad deja vender 20 unidades? ¿Cuántas unidades se deben vender para maximizar las utilidades?

Referencias

Larson-Hostetler. *Cálculo con geometría analítica*. McGraw-Hill.
Hoffmann. *Cálculo para ciencias sociales y administrativas*. McGraw-Hill.
Thomas-Finney. *Cálculo con geometría analítica*. Addison-Wesley Iberoamericana.
Pourcel Edwin J. y Varberg Dall. *Cálculo con geometría analítica*. Prentice Hall Iberoamericana.

El teorema del binomio

Sea n un entero positivo y x un número real. Al desarrollar explícitamente $(1 + x)^n$ se obtiene una suma de términos, cada uno de ellos de la forma "un coeficiente por una potencia de x". Por ejemplo,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

El teorema del binomio proporciona una fórmula para el desarrollo de $(1 + x)^n$ para cualquier entero $n > 0$, es decir,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots x^n \qquad (1)$$

El coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1 + x)^n$ es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \ldots \quad k} \qquad (2)$$

Este coeficiente se denota por $\binom{n}{k}$ o por C_k^n y se llama "coeficiente del binomio". Para ayudar a recordar su fórmula, tenga en cuenta que el denominador es el producto de los enteros desde 1 hasta k. El numerador tiene el mismo número de factores, que van desde n hasta $n - k + 1$ (decreciendo). Sencillamente, escriba cada factor del numerador encima del correspondiente en el denominador y así obtendrá el término sin error. Por ejemplo:

$$\binom{7}{3} = C_3^7 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\,(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$$

En la notación $\binom{n}{k}$ el teorema del binomio adopta la forma

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + x^n,$$

donde n es un entero positivo.

El factorial k !

El producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$ de todos los enteros desde 1 hasta k se llama "factorial de k". Así pues, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. La fórmula (2) para el coeficiente del binomio puede escribirse entonces

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \tag{3}$$

De hecho, la fórmula (2) puede remplazarse por una fórmula que sólo tiene factoriales. Es decir,

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinando lo anterior con (2), llegamos a una expresión pura en factoriales para el coeficiente $\binom{n}{k}$, a saber,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4}$$

Esta es la fórmula más útil cuando usted disponga de una calculadora que tenga tecla de factorial de k.

$0! = 1$: Es necesario definir $0!$ como 1 para que la fórmula (4) siga siendo válida incluso en los casos $k = 0$ y $k = n$. Por ejemplo, si $k = n$, (4) es

$$\frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

que es lo que queremos: el coeficiente de x^n en el desarrollo de $(1 + x)^n$ es 1.

El teorema del binomio para $(x + b)^n$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

El coeficiente de $a^{n-k}b^k$ es

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

por ejemplo, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Apéndice B
Trigonometría

La parte más útil de la trigonometría para el cálculo incluye el estudio de tres funciones fundamentales: el seno, el coseno y la tangente. En este Apéndice se hace énfasis en la relación entre el ángulo y la longitud del arco sobre el círculo para obtener rápidamente las funciones trigonométricas.

Medida de un ángulo en radianes

En la vida ordinaria los ángulos se miden en grados, siendo 360° la medida del ángulo circular completo. El número 360 fue escogido por los astrónomos babilonios, quizá por el hecho de que hay aproximadamente 360 días en un año y también por el gran número de divisores de 360. Esta unidad, algo arbitraria, complica mucho el cálculo con las funciones trigonométricas. Una unidad mucho más natural y geométrica es la que se usa en cálculo; se denomina "radián" y se define en términos de la longitud de arco del círculo.

Medida en radianes

Para medir el tamaño de un ángulo, tal como el $\measuredangle ABC$ mostrado en la Figura B_1, se traza un círculo con centro en B.

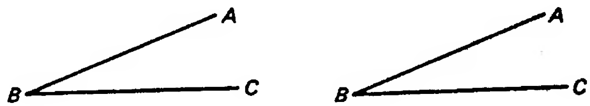
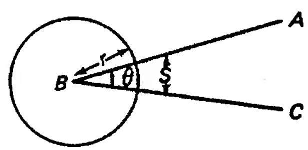


Figura B_1

Si el círculo tiene radio r, y el ángulo determina un arco de longitud s, entonces el cociente

$$\frac{s}{r}$$



se define como la medida del ángulo en radianes, y se dice que el ángulo mide $\frac{s}{r}$ radianes. Es conveniente denotar la medida de un ángulo por el símbolo θ; es decir,

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Como s y r son longitudes, su cociente no tiene dimensiones; además, la medida en radianes no depende del círculo utilizado.

Conversión de grados a radianes y viceversa

Un ángulo de 180° es igual a dos ángulos rectos, luego mide π radianes. Es decir, para convertir grados en radianes o radianes en grados basta usar la proporción

$$\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$$

Ejemplo 1

¿Cuánto mide en radianes un ángulo de 30°?

Solución: haciendo uso de la proporción anterior,

$$\frac{30}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$$

se deduce que

$$\text{radianes} = \pi\ \frac{30}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 2

¿Cuánto mide en grados un ángulo de un radián?

Solución: utilizando la proporción

$$\frac{\text{grados}}{180} = \frac{1}{\pi}$$

entonces

$$\text{grados} = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3.14} \approx 57.3°$$

luego un ángulo de un radián mide aproximadamente 57.3°, algo menor que 60°.

Definición de las funciones trigonométricas

Dado un triángulo ractángulo de catetos x y y con hipotenusa r, como el de la Figura B_2, se definen las seis funciones trigonométricas *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante*, por las siguientes relaciones:

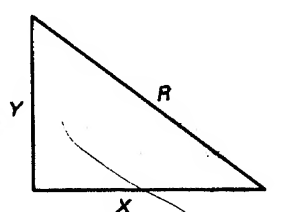


Figura B_2

$$\text{seno } \theta = \frac{y}{r} = \text{sen } \theta$$

$$\text{coseno } \theta = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\text{tangente } \theta = \frac{y}{x} = \text{tang } \theta$$

$$\text{cotangente } \theta = \frac{x}{y} = \text{ctang } \theta$$

$$\text{secante } \theta = \frac{r}{x} = \sec \theta$$

$$\text{cosecante } \theta = \frac{r}{y} = \text{cosec } \theta$$

En la siguiente tabla se encuentran los valores de las funciones trigonométricas de algunos ángulos, tanto en grados como en radianes.

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tang	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe	0	no existe	0
ctang	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	no existe	0	no existe
sec	1	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	no existe	-1	no existe	1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	no existe	-1	no existe

Identidades trigonométricas

Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, en algunos casos es conveniente convertirlas en otras equivalentes. Estas relaciones se denominan identidades trigonométricas y algunas de éstas son:

Identidades trigonométricas básicas

$$\text{tang } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{tang } \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$1 + \text{tang}^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{ctang } \theta = \frac{1}{\text{tang } \theta}$$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \text{ctang}^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta$$

Identidades para la suma y la diferencia de ángulos

$$\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x$$

$$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cos y - \text{sen } y \cos x$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y$$

$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{ sen } y$$

$$\text{tang } (x + y) = \frac{\text{tang } x + \text{tang } y}{1 - \text{tang } x \text{ tang } y}$$

$$\text{tang } (x - y) = \frac{\text{tang } x - \text{tang } y}{1 + \text{tang } x \text{ tang } y}$$

Identidades para ángulos dobles

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$\text{tang } 2x = \frac{2 \text{ tang } x}{1 - \text{tang}^2 x}$$

Identidades para ángulos medios

$$\text{sen } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Cuando se trabaja con triángulos que no son rectángulos, las funciones trigonométricas seno y coseno se definen mediante las relaciones denominadas ley del seno y ley del coseno, respectivamente enunciadas a continuación:

Dado un triángulo de lados A, B y C con ángulos α, β, γ, como en la Figura B_3, se cumple que:

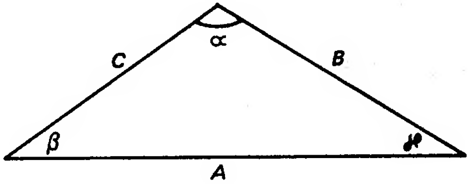


Figura B$_3$

ley del seno:

$$\frac{A}{\text{sen } \alpha} = \frac{B}{\text{sen } \beta} = \frac{C}{\text{sen } \gamma}$$

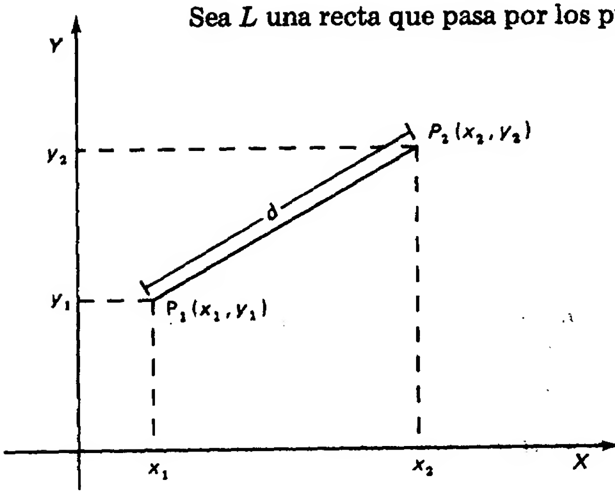
ley del coseno:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\, BC \cos \alpha$$
$$B^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2\, BC \cos \beta$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\, AB \cos \gamma$$

Apéndice C

Geometría analítica

Sea L una recta que pasa por los puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$.



d: distancia entre p_1 y p_2
m: pendiente

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

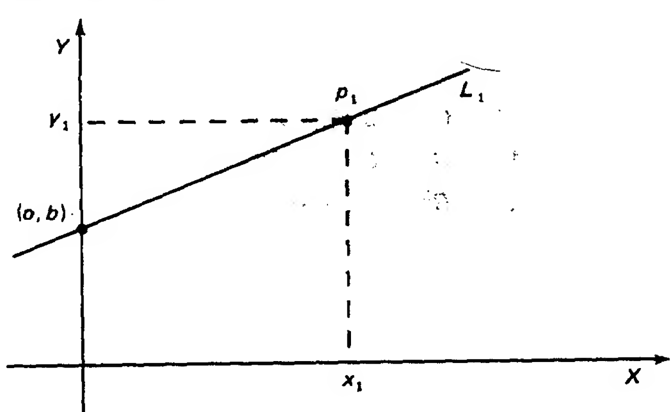
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \text{tang}\ \alpha$$

α: ángulo de inclinación

La recta

Ecuación general: $Ax + By + C = 0$



Otras formas de la ecuación de la recta son:

1. Punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

2. Puntos p_1, p_2 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$; $x_1 \neq x_2$

3. Intersecto b y m $y = mx + b$

Relaciones entre rectas

Para $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$ se cumple que:

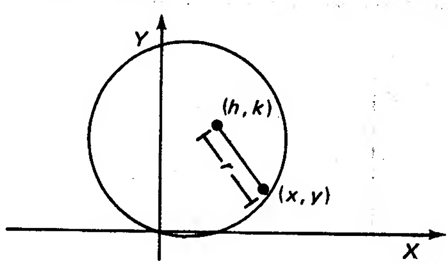
a) Son paralelas si $m_1 = m_2$

b) Son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$

Cónicas

La circunferencia

Consiste en el conjunto de puntos (x, y) del plano que están a una distancia positiva r, dado un punto fijo (h, k).

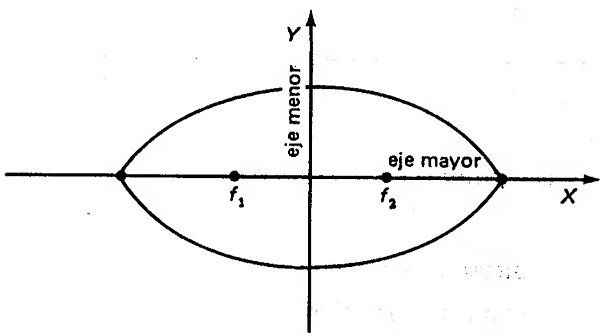


Ecuaciones de la circunferencia:

1. Con centro en el origen y radio R $x^2 + y^2 = R^2$
2. Centro en (h, k) y radio R $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$

La parábola

Es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco) que está fuera de dicha recta.



Centro en (h, k), longitud del eje mayor, $2a$; longitud del eje menor, $2b$.

a) Eje mayor, paralelo al eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

b) Eje mayor, paralelo al eje Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

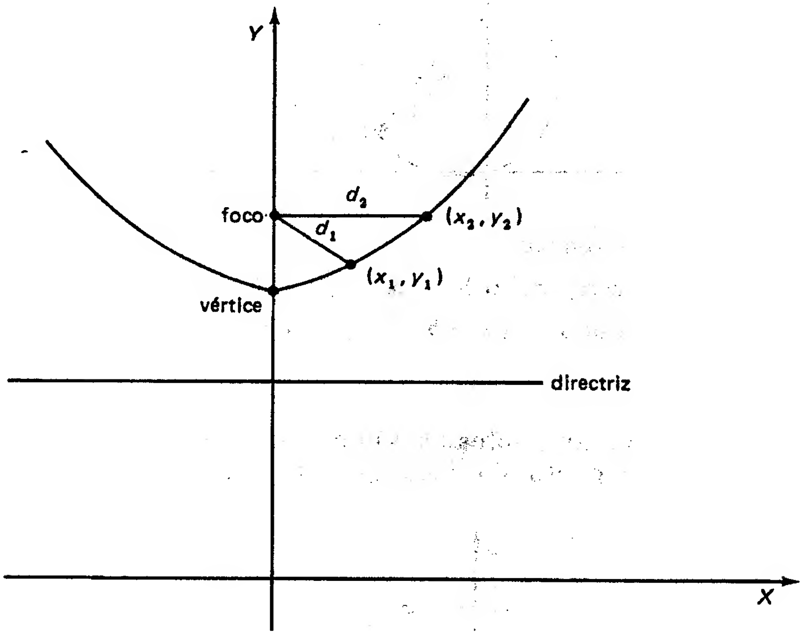
c) Distancia focal c del centro 0 a uno de los focos

$$C = \sqrt{a^2 - b^2}$$

d) Excentricidad ϵ

$$\epsilon = \frac{c}{a} < 1$$

La excentricidad mide el achatamiento de las elipses.



El vértice es $V(h, k)$ y la distancia de V al foco es $a > 0$.

Eje paralelo al eje X

— abierta a la derecha $\quad (y-k)^2 = 4a\,(x-h)$

— abierta a la izquierda $\quad (y-k)^2 = -4a\,(x-h)$

Eje paralelo al eje Y

— abierta hacia arriba $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

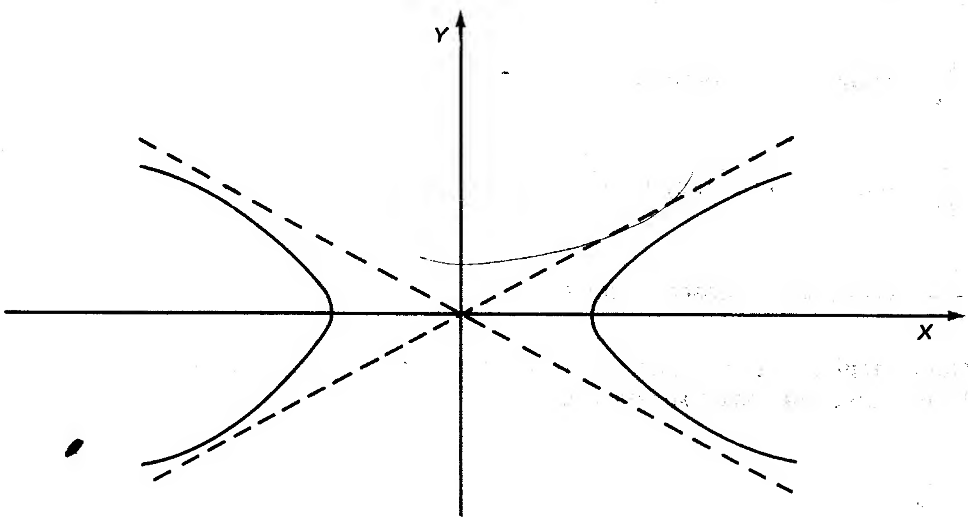
— abierta hacia abajo $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

Elipse

Es el conjunto de puntos (x, y) del plano cuya suma de distancias a dos puntos distintos prefijados, llamados focos, es constante.

La hipérbola

Es el conjunto de puntos (x, y) del plano para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos prefijados, llamados focos, es constante.



Centro $0(h, k)$, eje mayor $2a$ y eje menor $2b$

a) Eje mayor paralelo al eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

b) Eje mayor paralelo al eje Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

c) Distancia focal del centro 0 a uno de los focos

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d) Excentricidad ϵ

$$\epsilon = \frac{c}{a} > 1$$

Derivada de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tang } u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{ctang } u) = -\text{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \text{ tang } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ ctang } u \frac{du}{dx}$$

Como regla, recuerde que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) llevan signo menos en sus derivadas.

Apéndice E

Fórmulas fundamentales de integración

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\, dx = f(x) + C$

2. $\int (u + v)dx = \int u\, dx + \int v\, dx$

3. $\int au\ dx = a \int u\, dx$, siendo a una constante

4. $\int u^{m}\, du = \dfrac{u^{m} + 1}{m + 1} + C, \quad m \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln |u| + C$

6. $\int a^{u}\, du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C, a > 0, \ a \neq 1$

7. $\int e^{u}\, du = e^{u} + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \operatorname{tang} u\, du = \ln |\sec u| + C$

11. $\int \operatorname{ctang} u\, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$

12. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \operatorname{tang} u| + C$

13. $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctang} u| + C$

14. $\int \sec^{2} u\, du = \operatorname{tang} u + C$

15. $\int \operatorname{cosec}^{2} u\, du = \operatorname{ctang} u + C$

16. $\int \sec u \operatorname{tang} u\, du = \sec u + C$

RESPUESTAS

Capítulo I

1. $A = H$
   $D \subset A$
   $D \subset H$
   $C \subset E$
   $F = I$
   $F \subset J$
   $I \subset J$

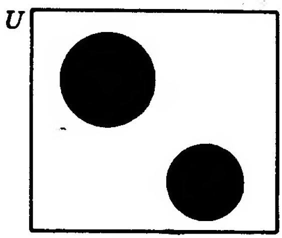
2. *a)* $\{2\}, \{9\}, \{2, 9\}, \phi$
   b) $\{\{2\}\}, \{9\}, \{\{2\}, 9\}, \phi$
   c) $\{\phi\}, \{\{1\}\}, \{1\}, \{\phi, \{1\}\}, \{\phi, 1\}$
   $\{\{1\}, 1\}, \{\phi, \{1\}, 1\}, \phi$
   d) $\{\quad\}, \{\{\ \}\}$

3. *a)* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
   b) $A \cap B = \{8\}$
   c) $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$
   d) $(A \cup B)' = \{2, 5, 7, 9\}$
   e) $(A \cap B) \cup C = \{1, 4, 6, 8, 10\}$
   f) $(A \cup B) \cap C = \{1, 4, 6, 10\} = C$

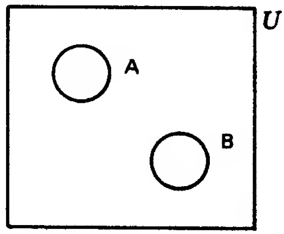
4. *a)* ϕ
   b) $\{a, b, c, d\}$
   c) ϕ
   d) $\{x$ (persona) $\mid x$ es estudiante o tiene más de 30 años$\}$
   e) $\{x$ (persona) $\mid x$ es estudiante mayor de 30 años$\}$
   f) $\{x$ aeroplano $\mid x$ es Boeing 747 o pertenece A.L.S.$\}$

5. *a)* $A' = \{x$ (alumno U.N) $\mid x \notin$ al primer año$\}$
   b) $A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup U = U$
   c) $A \cap \phi = \phi$ $\qquad$ $A \cup \phi = A$
   d) $A \cap A' = \phi$ $\qquad$ $A \cup A' = U$
   e) Sí, porque la unión cumple la propiedad conmutativa
   f) Sí, porque la intersección cumple la propiedad conmutativa

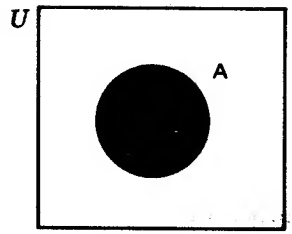
6. *a)* $A = B$
b) $A = B$
c) $A \subset B$
d) $A \subset B$
e) $A = B$
f) $A \subset B$
g) $A \subset B$
h) $A \subset B$
i) $B \subset A$
j) $A \subset B$



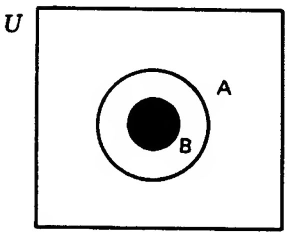
$A \cup B$



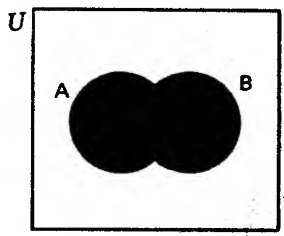
$A \cap B = \phi$



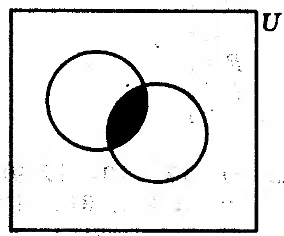
$A \cup B = A$



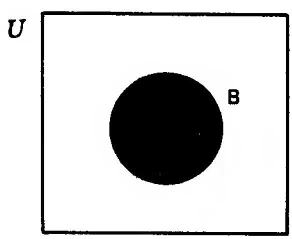
$A \cap B = B$



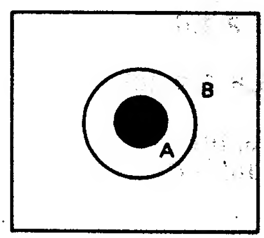
$A \cup B$



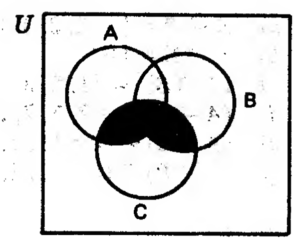
$A \cap B$



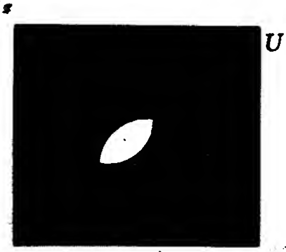
$A \cup B = B$



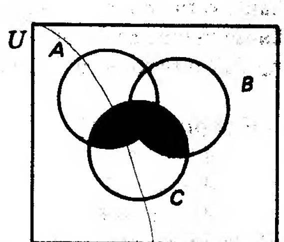
$A \cap B = A$



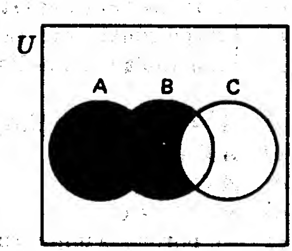
$(A \cup B) \cap C$



$(A \cap B)' \cup C$



$(A \cup B) - (A \cup C)'$



$A \cup (B - C)$

9. *a)* i) 7 ii) 0 iii) 6
b) i) 24 ii) 5 iii) 6
c) i) 60 ii) 13 iii) 29 iv) 8

10. $A = \{\phi, \{1,2\}, \{1\}, \{\phi\}, 1, \{2\}\}$
a) V *b)* F *c)* F *d)* V *e)* F *f)* V
g) V *h)* V *i)* V *j)* F

11. *a)* $\wp(M) = \{\{3\}, \{5\}, \{3,5\}, \phi\}$
b) $\wp(M) = \{\{3\}, \{5\}, \{\phi\}, \{3,5\}, \{3,\phi\}, \{5,\phi\}, \{3,5,\phi\}, \phi\}$
c) $\wp(M) = \{\{\phi\}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\phi,1\}, \{\phi,\{1\}\}, \{1,\{1\}\}, \{\phi,1,\{1\}\}, \phi\}$

12. *a)* sugerencia: aplicar propiedad distributiva
b) recuerde que: $A \cup A' = U$
c) aplicar leyes de D'Morgan.

13. Sugerencia: inicialmente aplicar la propiedad asociativa; recuerde la definición de cardinal de 2 conjuntos.

14. Debe tener en cuenta las sugerencias dadas para el ejercicio 12.

Capítulo 2

1. Sugerencia: observe las Tablas del numeral 3 del resumen

2. *a)* V V F F   *b)* V V F V   *c)* V F F F   *d)* tautología

3. *a)* Falacia *b)* Tautología

4. Debe obtener en cada caso una tautología.

5. Construir una tabla.

8. Usar $\forall$ y $\exists$

10. Recuerde que $\sim(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Capítulo 3

1. *a)* $\mathbb{Z}$ *b)* $\mathbb{C}$ *c)* $\mathbb{Q}$ *d)* $\mathbb{I}$ *e)* $\mathbb{I}$ *f)* $\mathbb{Q}$
g) $\mathbb{I}$ *h)* $\mathbb{N}$ *i)* $\mathbb{C}$

2. *a)* $7-(+9)=-2$ *b)* $\mathbb{Z}$ *c)* $\frac{b}{o} \notin \mathbb{R}$

d) $R - \{o\}$ *e)* $(Q, \div)$ *f)* conmutativa
g) suma y producto *h) véase* a) *i) véase* a)

3. *a)* No, porque $1 \otimes 2 \neq 2 \otimes 1$
b) No, porque $(2 \otimes 3) \otimes 1 \neq 2 \otimes (3 \otimes 1)$
c) No hay idéntico
d) No hay inverso
e) 1

4. *a)* Verdadero *b)* Falso *c)* Falso
d) Aplicar R_3, R_6, R_4, en ese orden.
e) Suponer que X_1 y X_2 son soluciones
f) Falso

5. si $x = y$ entonces $x - y = 0$; en el cuarto paso se divide por $x - y$

9. *a)* y *b)*, ambas se cumplen.

Capítulo 4

1. *a)* $6x^2 - 8x - 6$
b) $-3x^2 + 14xy - 7x + 4$
c) $4a^2 + c^3$
d) $-4y^4 - 2x^2 - 5xy + 4y^2$
e) $8s^5 - 2r^3 + 16r^2s + 9rs^2$
f) $-a^2 - 14b^2 - 13ab$
g) $16x^2 - 2xy + 2y^2$

2. *a)* $15x^4 - 51x^3 + 30x^2 + 24x$
b) $10m^2n - 4mn^2 + mn - n^2 - 6m^3$
c) $xy^3 + x^2y^2z + y^3 + xy^2z + x^2y^2 + x^3yz + xy^2 + x^2yz$
d) $-5x^6 + 18x^5 - 3x^4 - 28x^3 - 14x^2 + 24x + 24$
e) $12a^7 + 8a^4 - 22a^4b^2 + 6ab^4 + 3a^3b^3 - 12ab^2 + 2b^3 - b^5$
f) $r^3s^2 - 2r^3s + 6r^3 + 3r^2s^4 - 6r^2s^3 + 18r^2s^2 + s^6 - 2s^5 + 6s^4$
g) $10x^6 - x^5y + 4x^4y^2 + 11x^3y^3 - 7x^2y^4 - 2xy^5 + y^6$
h) $4a^6 - 6a^5b + 3a^4b^2 - 6a^3b^3 - a^2b^4 + 2ab^5 - b^6$

3. *a)* $a^4 + 3a^2 - 40$
b) $x^2 - 2$
c) $225 + 30x^2y^5 + x^4y^{10}$
d) $a^4b^2 - 2\sqrt{3}a^2b - 3$
e) $27/x^3 + 27 + 9x^3 + x^6$
f) $27m^3 - 27\sqrt{2}\,m^2n + 18mn^2 - 2\sqrt{2}\,n^3$
g) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

4. *a)* $(x + 4)(x - 2)$
b) $(x + 4)(x + 8)$
c) $(x + 1)(x + 11)$
d) $3(2x + 3)(2x - 3)$
e) $(a - 10b)(a - 3b)$
f) $(x - 2)(3x + 4)$
g) $(x - 1)(x + 2)$
h) $(6x + 11)(6x - 11)$
i) $(x - 3)(x + 3)$
j) $(x + y + 5)(x - y - 3)$
k) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$
l) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
m) $(k + 3 + x)(k + 3 - x)$
n) $x(x + 4y)(2x - y)$
o) $y(x - 3y)(x + \frac{1}{2}y)$
p) $(x - 2y + 5)(3x - y + 4)$

5. a)	$x^2 + x^2 - 5$	$R(x) = 0$
b)	$3x^2 + 5x + 2$	$R(x) = 5$
c)	$2x^2 + 3x + 5$	$R(x) = 2x - 4$
d)	$4x^3 + x - 3$	$R(x) = -x + 7$
e)	$x^3 + 2x + 3$	$R(x) = -2$
f)	$x^2 + 3$	$R(x) = 4x^2 + x + 2$
g)	$2x^3 - x + 6$	$R(x) = -4x + 11$
h)	$x^4 - x^2 + 1$	$R(x) = -2$
i)	$x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$	$R(x) = 0$
j)	$\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$	$R(x) = 2$

6. a) $\dfrac{6a + 33b}{(2a + 3b)(3b - 2a)}$ b) $\dfrac{3a - 5b}{a(a - b)}$

c) $\dfrac{-x^4 + x^3 + 12x^2 + 12x}{(x + 1)^2 (x + 2)^2}$ d) $\dfrac{3x^3 - 3x^2 + 2x + 2}{x(x^2 - 1)}$

e) $\dfrac{47}{(x - 4)(x + 4)(x + 1)}$ f) $\dfrac{x + 4}{x}$

g) $\dfrac{(x + 4)(x + 5)}{(x + 1)(x + 2)}$ h) $\dfrac{2}{5}$

i) $-\dfrac{1}{r + 2}$ j) $\left(\dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x(2x + 1)}\right)\left(\dfrac{17x^2 - 24x + 9}{x(4x - 3)}\right)$

k) $\dfrac{(x - 3)(1 - 2x)}{2(x + 1)(x + 4)}$ l) $\dfrac{11a + 2b}{5a}$

m) $\dfrac{(4x^2 - x)(x + 3)(x + 2)}{(x + 1)(2x - 3)(x^3 - x^2 - 2x - 3)}$

Capítulo 5

Ejercicio 1

a) $-\dfrac{8}{27}$ b) $\dfrac{1}{432}$ c) 81 d) $-\dfrac{71}{9}$

e) 729 f) $\dfrac{38}{3}$ g) 256 h) $\dfrac{1}{4}$

Ejercicio 2

a) $\dfrac{1}{4a^3}$ b) $-\dfrac{108y^{22}}{x^8}$ c) x^4y^6 d) $-\dfrac{125}{64x^3}$

e) $\dfrac{32x^5}{y^4}$ *f)* 1 *g)* $\dfrac{36y^{20}}{x^{12}z^{10}}$

Ejercicio 3

a) $4^{-1}a^{-3}$ *b)* $-108x^{-8}y^{22}$ *c)* x^4y^6 *d)* $(-125)(64)^{-1}x^{-3}$

e) $32x^5y^{-4}$ *f)* 1 *g)* $36x^{-12}y^{20}z^{-10}$

Ejercicio 4

a) $4xy^{-2}$ *b)* $2a\sqrt[5]{\dfrac{3a^2}{y-3}}$ *c)* $2a^2b^4$ *d)* $6\sqrt{3}$

e) $xy\sqrt[6]{500xy^3}$ *f)* $2x+y$ *g)* $\dfrac{y}{3x^2}\sqrt[3]{y^2}$

Ejercicio 5

a) $3a^2$ *b)* $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{17}{12}}}$ *c)* $a^{\frac{11}{6}}$ *d)* $\dfrac{b}{a}$ *e)* $\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{4}{3}}}$

Ejercicio 6

a) $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ *b)* $4(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ *c)* $\dfrac{4\sqrt{x-2}}{x-2}$

d) $-2(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1})$ *e)* $\dfrac{3}{47}\left[(2\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{8})\right]\left[7-4\sqrt{6}\right]$

f) $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ *g)* $\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ *h)* $\dfrac{3x^2(\sqrt{1-2x^2})}{1-2x^2}$

i) $x\left[\dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-4}}{x^2-x+1}\right]$ *j)* $\dfrac{56\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{77}$

Ejercicio 7

a) $\dfrac{1}{4}$ *b)* $\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{21})}{21}$ *c)* $\dfrac{2x+3x\sqrt{x}-8\sqrt{x}}{4x-x^2}$

d) $\dfrac{4x^2}{1-x}$ *e)* $\dfrac{1}{25}$ *f)* $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{11})(\sqrt{77})}{77}$

g) $\dfrac{(4x^2+3-\sqrt{x+2})\,(x^2\sqrt{x+2}+3x^2)}{x^4(x+2)-9x^4}$ *h)* $\dfrac{3}{4-x}$

Capítulo 6

1. *a)* $x=\dfrac{5}{13}$ *b)* $x=\dfrac{47}{2}$ *c)* $x=\dfrac{69}{10}$ *d)* $x=\dfrac{52}{11}$

e) $x=-\dfrac{31}{9}$ *f)* $x=-\dfrac{3}{13}$ *g)* $x=-\dfrac{11}{8}$ *h)* $x=\dfrac{13}{14}$

i) $x=-\dfrac{2}{41}$ *j)* $x=-\dfrac{14}{25}$

2. *a)* $x=-3$; $x=-2$ *b)* $x=\dfrac{7}{3}$, $x=-\dfrac{3}{2}$

c) No tiene respuesta en $\mathbb{R}$, $x=\dfrac{5+\sqrt{3}\,i}{8}$; $x=\dfrac{5-\sqrt{3}\,i}{8}$

d) $x=8$ $x\neq 0$

e) No tiene respuesta en $\mathbb{R}$; $x=\sqrt{5}\,i=\sqrt{-5}$; $x=-\sqrt{5}\,i=-\sqrt{-5}$

f) $x=\dfrac{5+\sqrt{137}}{2}$; $x=\dfrac{5-\sqrt{137}}{2}$ ó $x=8.35$; $x=-3.35$

g) $x=\dfrac{-10+\sqrt{48}}{2}=-1.54$, $x=\dfrac{-10-\sqrt{48}}{2}=-8.46$

h) No tiene respuesta en $\mathbb{R}$; $x=\dfrac{9+\sqrt{-47}}{6}=\dfrac{9+\sqrt{47}\,i}{6}$;

$x=\dfrac{9-\sqrt{-47}}{6}=\dfrac{9-\sqrt{47}\,i}{6}$

i) $x=1$; $x=-3$ *j)* $x=-2$

3. *a)* $x=3$; $x=10$ (solución aparente) *b)* No tiene solución

c) $x=\dfrac{13}{4}$ *d)* $x=6$: $x=3$ (solución aparente)

e) No tiene solución *f)* $x=-4$

g) $x=0$; $x=-4$ (solución aparente) *h)* $x=4$

i) $x=0$; $x=-4$ (soluciones aparentes) *j)* $x=0$; $x=3$

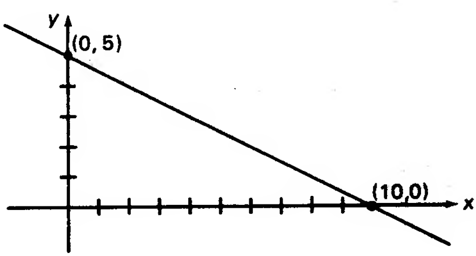
4. *a)* $x=2$; $y=-3$ $(2,-3)$
b) $x=0$; $y=5$ $(0,5)$
c) $x=-1$; $y=3$ $(-1,3)$
d) $x=3$; $y=1$ $(3,1)$
e) $x=4$; $y=2$ $(4,2)$

5. *a)* (1, 0) ; (−4, 5) *b)* (2, 2) ; (−2, 10) *c)* (3, −1) ; (−4, −8)
d) (2, 2) ; (−3, −8) *e)* (2, 3) *f)* (−3, −5) *g)* (5, 0)
h) (−3, 4) ; (4, −3) *i)* $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$; $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

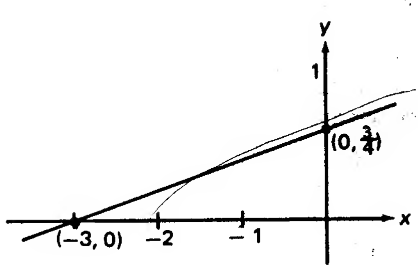
6. *a)* (1, 1, 1) *b)* (2, −1, 3) *c)* (1, 0, −4) *d)* (0, 0, 1)
e) infinitas soluciones *f)* infinitas soluciones *g)* infinitas soluciones
h) infinitas soluciones *i)* (2, 1, 3) *j)* (3, −4, 1) ; (−3, 4, −1)

7. *a)* Los dos números son 6 y 9
b) $x = 70$, $y = 120$ o $x = 60$, $y = 140$
c) 12236 votos recibió el ganador, que es *A*
d) 18 unidades/min produce el primero y 12 unidades/min produce el segundo.
e) El precio de una manzana es $180 y el precio de una pera es $45.
f) 1000 por periódico y 150 por T.V.
g) Notor = $40 ; Coflin = $50
h) Neverstact recorre 40 km y Everknock recorre 51 km.
i) El promedio es de 3.0.
j) a) $4,290,000 al 3% y $710,000 al 1%
b) $ 92,600
k) 216 artículos de $32,000 y 184 artículos de $ 4,500
l) Cada escritorio tiene un costo de producción de $65,000.
m) $x = 2573.15$
n) Un número mayor de 400 empaques.
o) Número de aptos. a vender 20; Precio por apto. = $22,000,000

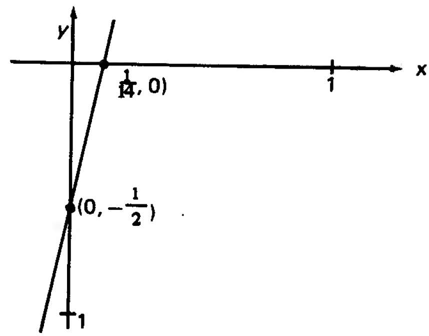
p) a)



b)



c)

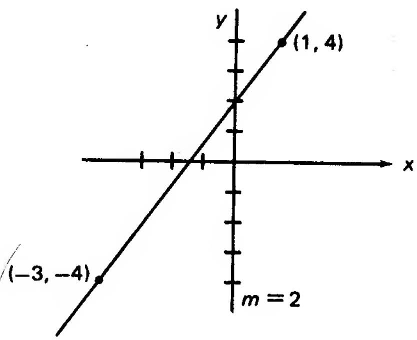


q) a) $2x + 3y = 720$
b) 180

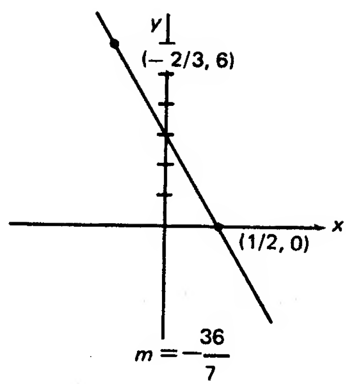
r) a) (60,190)
b) (30,200)
c) (40,1229.98)

Capítulo 7

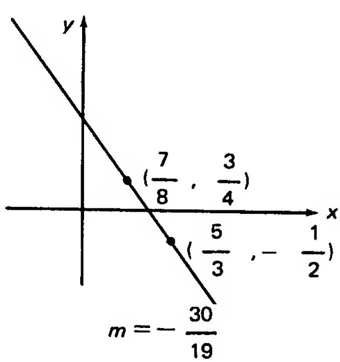
1. *a)*



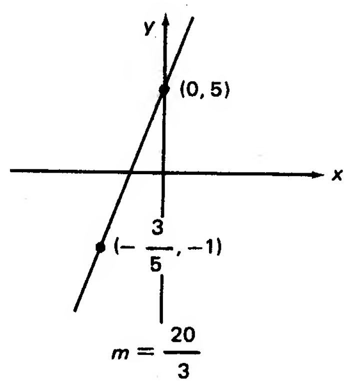
b)



c)



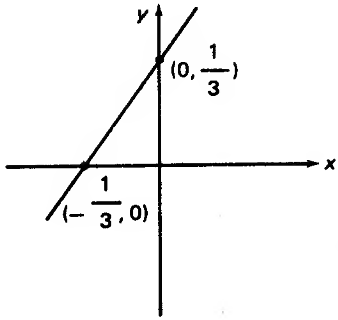
d)



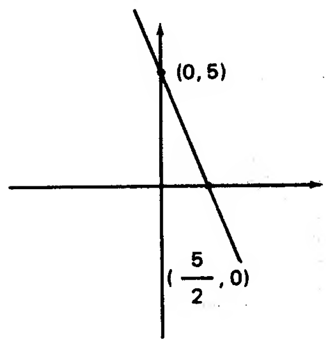
2. *a)* $y = -2x - \frac{5}{2}$ *b)* $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$

c) $y = \frac{3}{4}x + 3$ *d)* $y = \frac{1}{6}x$

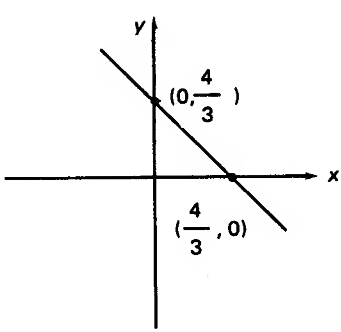
3. *a)* $y = x + \frac{1}{3}$

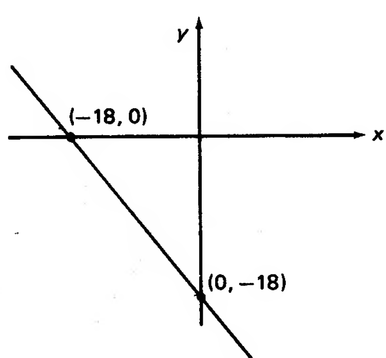


b) $y = -2x + 5$

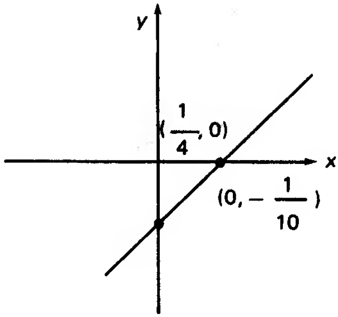


c) $y = -x + \frac{4}{3}$ *d)* $y = -x - 18$

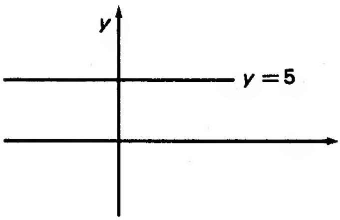




e) $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{10}$



f) $y = 5$



4. *a)* $\left(0, \frac{21}{10}\right)$ y $\left(-\frac{63}{19}, 0\right)$

b) $\left(0, -\frac{57}{14}\right)$ y $\left(-\frac{57}{6}, 0\right)$ *c)* $(0, 1)$

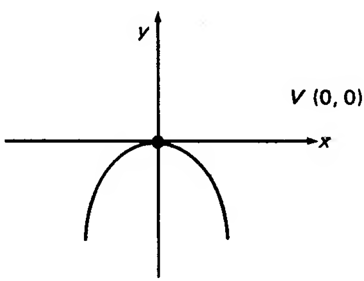
d) $(0, 22)$ y $\left(\frac{22}{3}, 0\right)$

5. *a)* Valen $937.500
b) $y = -50x + 40{,}000$; 420 kilos
c) aproximadamente 40 artículos
d) 1) $y = 100x + 15{,}000$ Ecuación de oferta
$y = -33.33x + 118{,}333.33$ Ecuación de demanda

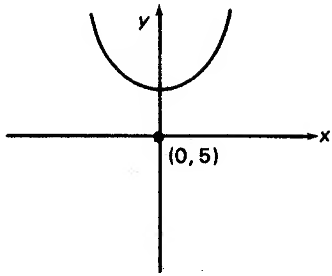
2) punto de equilibrio (775,92.500)

3) se procede como en los numerales 1) y 2) pero restándole $2500 al precio.

6. *a)* $y = -x^2$

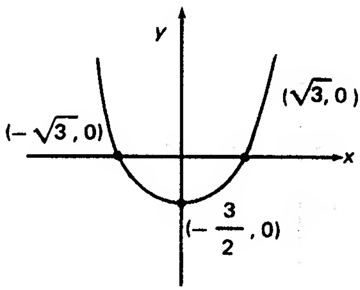


b) $y = x^2 + 5$



$V\ (0, 5)$

c) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$

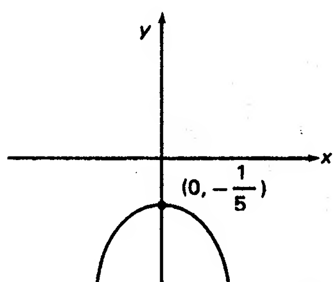


$V\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

Cortes

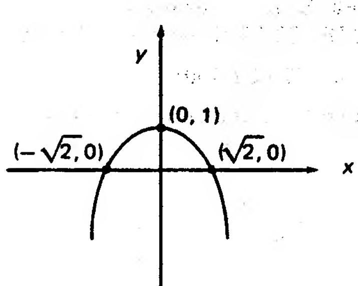
$(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

d) $y = -\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{1}{5}$



$V\left(0, -\dfrac{1}{5}\right)$

e) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 1$



$V\ (0, 1)$

Cortes

$(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$

7. *a)* $Q(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{9}$

$R(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{44}{9}$

b) $Q(x) = 8x^3 + 58x^2 + 348x + 2088$
$R(x) = 6265$

c) $Q(x) = \frac{9}{2}x^2$

$R(x) = 3x^3 + \frac{49}{2}x^2 - 3$

8. *a)* $R(x) = 1260$
b) $R(x) = 3$
c) $R(x) = \frac{1703}{2}$

9. (No tiene respuestas, porque son verificaciones).

10. *a)* $\left(-\frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{10}\right)$ *b)* $\left(2, -3, -\frac{1}{2}\right)$ *c)* $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$
d) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ *e)* $\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$ *f)* $\left(1, -1 \pm \sqrt{7}\right)$

Capítulo 8

1. *a)* $x \leqslant -3$ *b)* $x > -1$ *c)* $-5 < x < 3$
d) $\left(-\infty, -\frac{13}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$
e) $2.9 < x < 3.1$ *f)* $x < \frac{58}{5}$
g) $-1 < x < 5$ *h)* $-18 \leqslant x < -2$
i) $-\frac{42}{11} < x \leqslant -\frac{12}{11}$ *j)* $2 \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$

2. *a)* $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[8, \infty\right)$ *b)* $(2, 3)$ *c)* $(-\infty, -1] \cup [6, \infty)$
d) $[-9, -3] \cup [-2, 1] \cup [6, \infty)$ *e)* $[-3, -2]$ *f)* $(-\infty, -4)$
g) $(-3, -1) \cup (1, 2)$ *h)* $(-9, -4) \cup (1, 3)$
i) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (3, \infty)$

3. *a)* $(-4, 0)$ *b)* $(-\infty, -13) \cup (7, \infty)$ *c)* $[-2, \infty)$
d) $\left[\frac{3}{5}, 13\right]$ *e)* $[-4, 6]$

Capítulo 9

1. *a)* $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & 3 \\ -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & \frac{17}{7} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 6 & \frac{19}{2} \end{bmatrix}$ *d)* (no se puede realizar)

e) $\begin{bmatrix} \frac{17}{3} & \frac{4}{3} \\ 16 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

2. *a)* $[\,9\,]$ *b)* $\begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -2 & -8 \\ -11 & 33 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 20 & -9 & 23 \\ 5 & 7 & -4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

3. *a)* $\begin{bmatrix} 28 & 14 \\ 41 & 70 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -1 & 18 \\ -7 & 21 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a+c & -b-d \\ b-d & a-e \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} ac-bd & -ad-be \\ bc+ad & -bd+ae \end{bmatrix}$

4. *a)* $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$ *b)* $\begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right]$

5. *a)* $x = 6$ $y = \frac{13}{5}$ $z = \frac{27}{7}$

b) $x = -2$ $y = 3$ $z = 1$

c) $x = 0$ $\quad y = 1$ $\quad z = 0$

6. *a)* $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} \frac{2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{5}{26} \end{bmatrix}$ *e)* (no tiene inversa) *f)* (no tiene inversa)

g) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. *a)* $x = \frac{5}{6}$ $\quad y = \frac{2}{3}$ $\quad z = \frac{2}{3}$

b) $x = -1$ $\quad y = 3$ $\quad z = 2$

Capítulo 10

2. $R_O = \{(0, 1), (0, 2) \ldots (2, 1), (2, 2), \ldots (4, 1), (4, 2), (4, 4) \ldots\}$

Dominio de $R_O = \boldsymbol{E}$

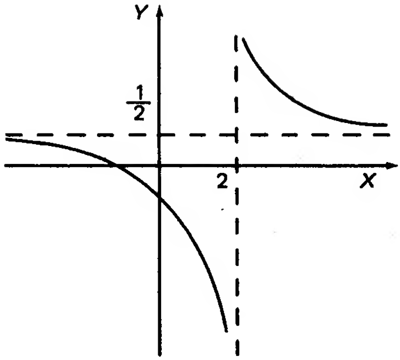
Rango de $R_O = \boldsymbol{Z}^+$

3. *a)* no es función
   b) función biyectiva
   c) es función
   d) función biyectiva

4. *a)* no es función
   b) no es función
   c) es función; dominio $\boldsymbol{N}$, rango $\boldsymbol{N}$
   d) no es función

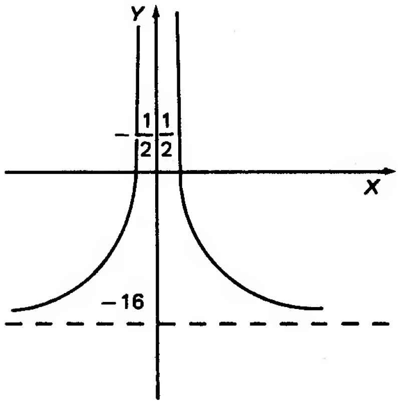
5. *a)* $D_f = \boldsymbol{R} - \{1, 2\}$, $R_f = \left(-\infty, -\frac{20}{9}\right) \cup (0, \infty)$
   b) $D_f = \boldsymbol{R}$, $\quad R_f = (-2, \infty)$
   c) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1\}$, $\quad R_f = \boldsymbol{R} - \{0\}$
   d) $D_f = \boldsymbol{R} - \{0\}$, $\quad R_f = \boldsymbol{R} - \{1\}$

6. *a)*



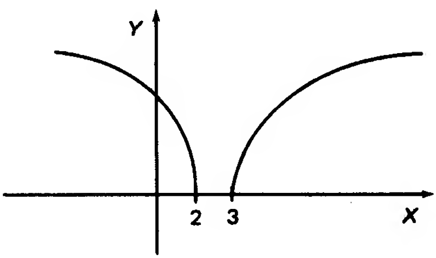
$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
$R_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

b)



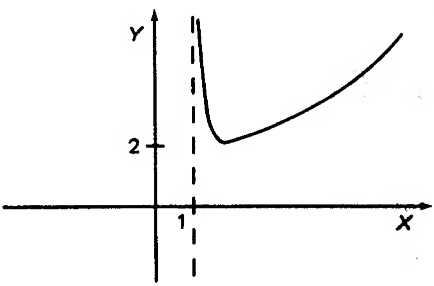
$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
$R_f = \mathbb{R} - \{-16\}$

c)



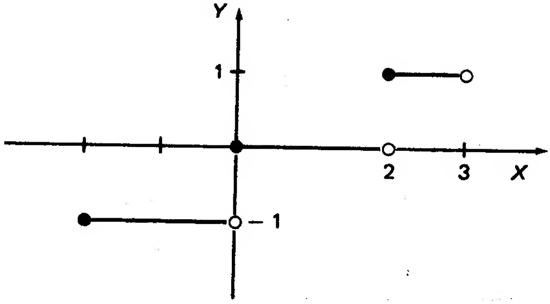
$D_f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$
$R_f = [0, \infty)$

d)

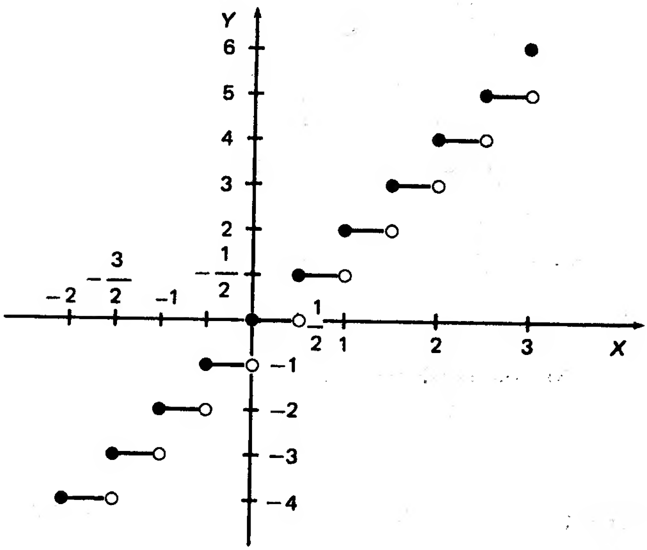


$D_f = (1, \infty)$
$R_f = [2, \infty)$

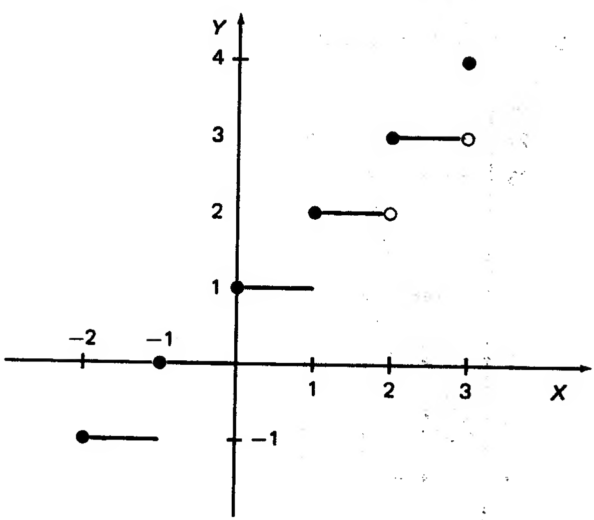
7. *a)*


Y
1
2
3
X
− 1

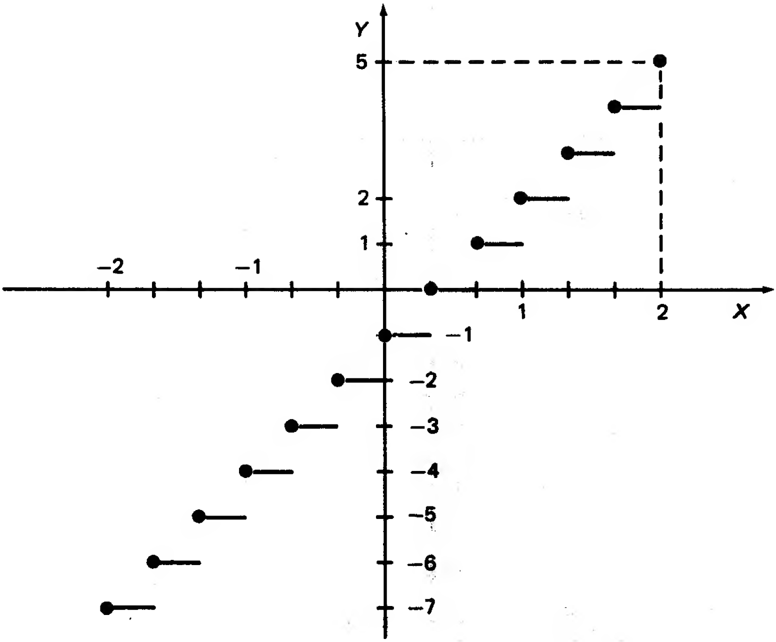
b)


Y
6
5
4
3
2
$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$
− 2
−1
$\frac{1}{2}$
1
2
3
X
−1
−2
−3
− 4

c)


Y
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
X
−1

d)



8. *a)* $\dfrac{29}{2}$ *b)* (no puede ser resuelto) *c)* -96 *d)* $-\dfrac{38}{225}$

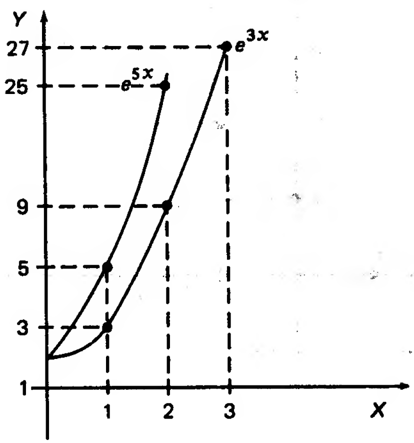
Capítulo 11

1. $e = 2.718281$; $e^0 = 1$; $e^3 = 20.085537$

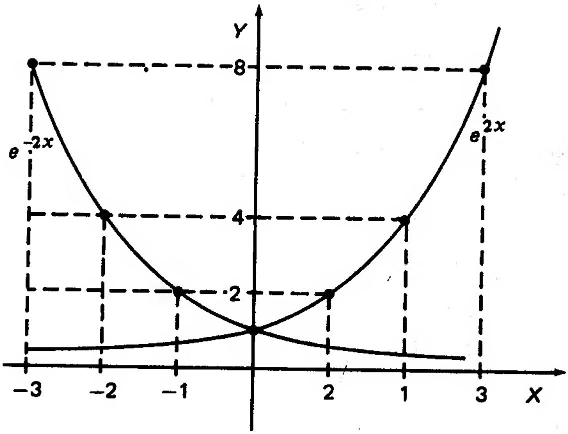
$e^{-2} = 0.135335$; $e^{\frac{1}{2}} = 1.648721$; $e^{\frac{1}{3}} = 1.395612$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} = 0.606530$; $e^{-4} = 0.018315$

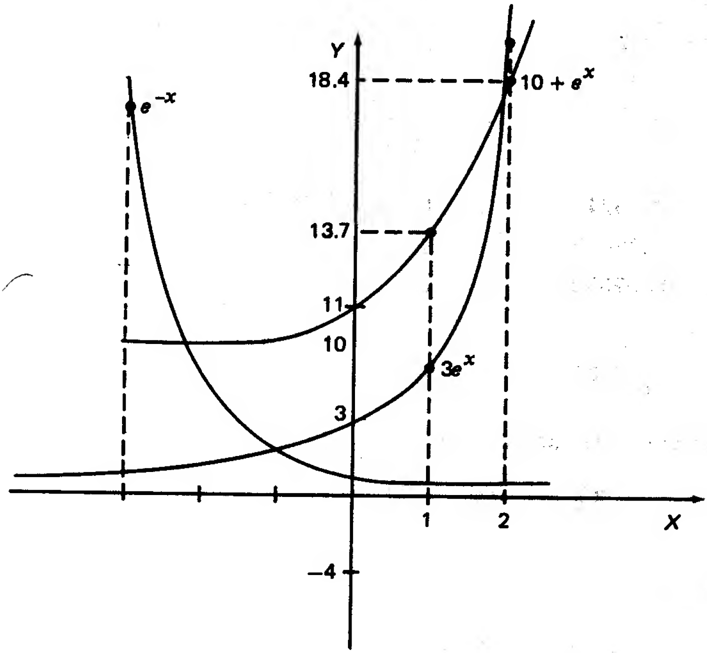
2.



3.



4.



5. *a)* $C_T = 4.32674871\,C$ *b)* $C_T = 4.32674871\,C$

7. *a)* $P(0) = 50$ millones *b)* $P(30) = 91{,}1$ millones

8. $C_O = 443{,}874.64$

9. $Y(1990) = 10^{11}e^{15k}$

10. $Q_O = 3{,}297.44$

11. *a)* 0.548811 *b)* 0.451188 *c)* 0.181269

12. $V(t) = 4000$

13. 329

14. *a)* 500 personas
b) 1572 personas
c) 2000 personas

15. *a)* 4 millones
b) 9,305,000
c) $\lim_{t \to \infty} P(t) = 10$ millones

16. 1880

17. $ln1 = 0$
$ln2 = 0.6931$
$lne = 1$
$ln0$: (no existe)
$ln{-2}$: (no existe)
$ln5 = 1.6094$
$ln\frac{1}{5} = -1.6094$
$lne^2 = 2$

18. *a)* $lne^3 = 3$
b) $ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$
c) $e^{ln5} = 5$
d) $e^{2ln3} = 9$
e) $\frac{8}{25}$
f) $\frac{19}{6}$

19. *a)* $x = 11.5524$
b) $x = 0.577622$
c) $x = 0.402359$
d) $x = e^{-b/2}$
e) $x = \dfrac{1}{c + e^{t/50}}$
f) $x = 7.389056$
g) $x = 4$
h) $x = \dfrac{9}{25}$
i) $x = 1.820478$
j) $x = ln^a$
k) $x = \dfrac{ln\,b}{ln\,a} - 1$
l) $x = e$

20. $r = 6,9314$

21. año 2095 aprox.

22. *a)* $t \approx 231$ años *b)* $t \approx 2720$ años

23. 3,143

24. *a)* 260 *b)* 324

Capítulo 12

1. *a)* 4 *b)* 6 *c)* 2 *d)* $\frac{1}{4}$ *e)* $\frac{1}{4}$ *f)* $\frac{\sqrt{2}}{4}$
g) $\frac{1}{3}$ *h)* 12 *i)* 1 *j)* $\frac{1}{4}$ *k)* 1 *l)* 1
ll) (no existe) *m)* 0 *n)* ∞

2. *a)* $\lim_{x \to 3^-} F(x) = 9$; $\lim_{x \to 3^+} F(x) = 9$: $\lim_{x \to 3} F(x) = 9$
b) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = 6$; $\lim_{x \to 3^+} F(x) = 27$; $\lim_{x \to 3} F(x)$: no existe

c) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = 7$; $\lim_{x \to 3^+} F(x) = 7$, $\lim_{x \to 3} F(x) = 7$

3. a) $y' = \dfrac{-12}{(4x+1)^2}$ b) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}$ c) $y' = 3x^2$

4. a) $y' = 5x^4 - 16x^3 - \dfrac{3}{2x^2}$ b) $y' = 6x^5 - 1$

c) $y' = (x^2+3x)(3x^2-2) + (x^3-2x)(2x+3)$ d) $y' = \dfrac{12x^4 - 2x + 5}{7}$

e) $y' = \dfrac{-10}{x^2}$ f) $y' = \dfrac{15(5x-1)^2(15-x^2) + 2x(5x-1)^3}{(15-x^2)^2}$

g) $y' = \dfrac{6x^2(x+\sqrt{x}) + x^3}{2\sqrt{x}}$ h) $y' = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^4}$ i) $y' = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

j) $y' = \dfrac{(5-\sqrt{x})(2x^3-4) - \sqrt{x}(x^3+1)}{2x^3}$

k) $y' = \dfrac{(x^3+5x+2)(5x^2+6x+3) - 2(3x^2+5)(x^3+2x^2+3x)}{2\sqrt{x}(x^3+5x+2)^2}$

l) $y' = \dfrac{5-7x^2}{6x^{\frac{1}{6}}(x^2+1)^2}$ m) $y' = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$

5. a) $y' = 2xe^{x^2}$ b) $y' = \dfrac{1}{x}$ c) $y' = \dfrac{3e^{-2x}(1-2x-2x\ln x)}{x}$

d) $y' = \dfrac{-6x}{9(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}$ e) $y' = \dfrac{3x^4+3x^2+2x}{1+x^2}$

f) $y' = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$ g) $y' = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{3x+2} - \dfrac{10x}{x^2+1}$

6. a) $y' = y\left[\dfrac{x\ln(x/2)+1}{2x\ln(x/2)}\right]$ b) $y' = 2xy\ln 5$ c) $y' = 1$

d) $y' = y(1+\ln x)$ e) $y' = y\left[\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{6x^2+3}{5(2x^3+3x)} - \dfrac{1}{4(x-1)}\right]$

7. a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ b) $y' = \dfrac{4-y}{x}$ c) $y' = \dfrac{-(2xy+y^2)}{x^2+2xy}$

d) $y' = \dfrac{-(x+2y)}{3y^2+2x}$ e) $y' = \dfrac{-(5x^4+2xy+y^3)}{x^2+3xy^2+5y^4}$

8. a) $y' = 2^x \ln 2$ b) $y' = 2xe^{x^2}$ c) $y' = (x^2+2x-1)e^x$

$y'' = 2^x(\ln 2)^2$ $y'' = 2(2x^2+1)e^{x^2}$ $y'' = (x^2+4x+1)e^x$

$y''' = 2^x(\ln 2)^3$ $y''' = 4x(2x^2+3)e^{x^2}$ $y''' = (x^2+6x+5)e^x$

d) $y' = (x^3 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2\right)$

$y'' = (x^3 - 2x + 1)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{15}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 1\right)$

$y''' = (x^3 - 2x + 1)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{15}{8}x^7 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{39}{5}x^5 + 30x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 18x - 3\right)$

e) $y' = \dfrac{3x^4}{x^3 - 1} + 2x\ln(x^3 - 1)$

$y'' = \dfrac{9x^6 - 18x^3}{(x^3 - 1)^2} + 2\ln(x^3 - 1)$

9. *a)* $T'(3) = 1{,}000$ $\quad \Delta T = 11{,}300$

b) Velocidad promedio = 6100 $\quad$ *c)* $Q'(1) = 0.2$; $\Delta Q = 0.15$

$V(t = 5) = 1400$

d) $P'(t) = \dfrac{6}{(t+1)^2}$ $\quad P'(1) = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ crecerá 5.4

$\lim\limits_{x \to \infty} P'(t) = 0$

e) $R'(80) = 248$ $\quad \Delta R = 248{,}05$ $\quad$ *f)* $U'(50) = 3700$

g) $I'(40) = -2580$ $\quad I'(P = 600) = -3100$ $\quad U'(40) = -2590$

h) $\dfrac{dc}{dt}(x = 400, t = 12) = 10{,}914$

Capítulo 13

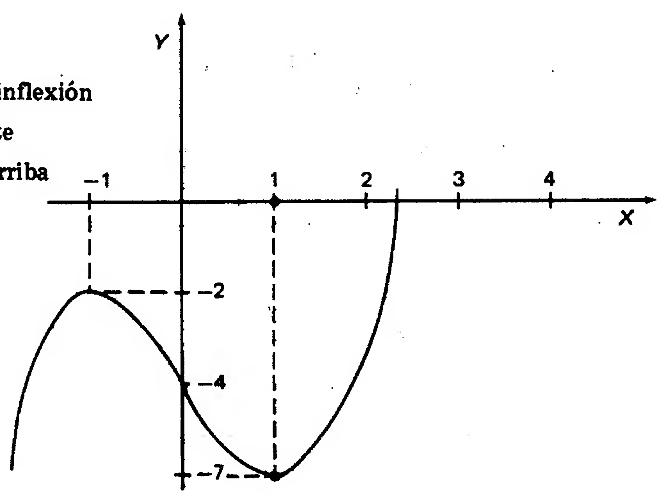
a) $x = -1$ máximo

$x = 1$ mínimo

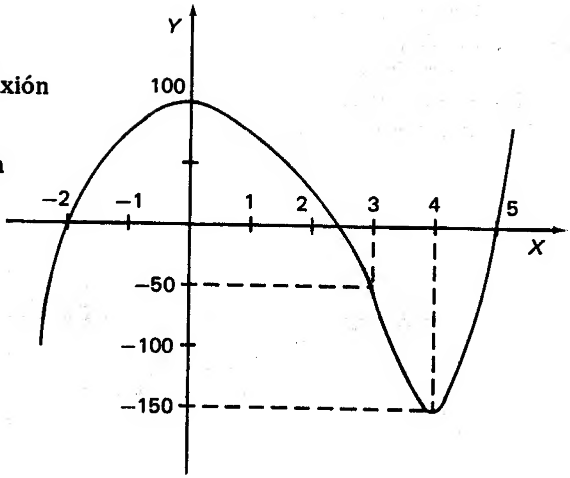
$x = 0$ punto de inflexión

$(-1, 1)$ decreciente

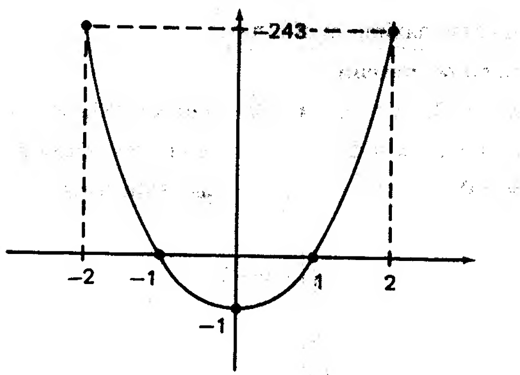
$(0, \infty)$ convexa arriba



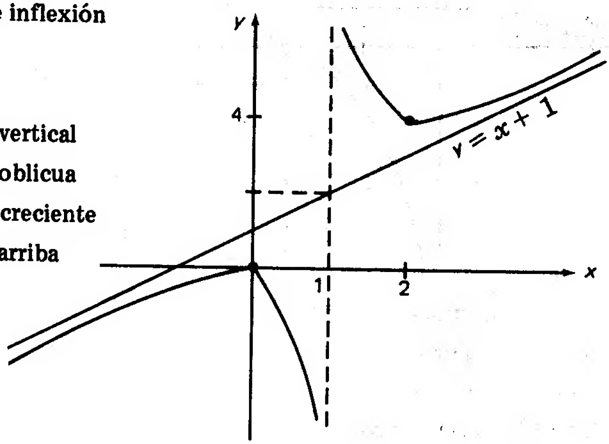
b) $x = 0$ máximo
$x = 4$ mínimo
$x = 3$ punto de inflexión
$(0, 4)$ decreciente
$(3, \infty)$ convexa arriba



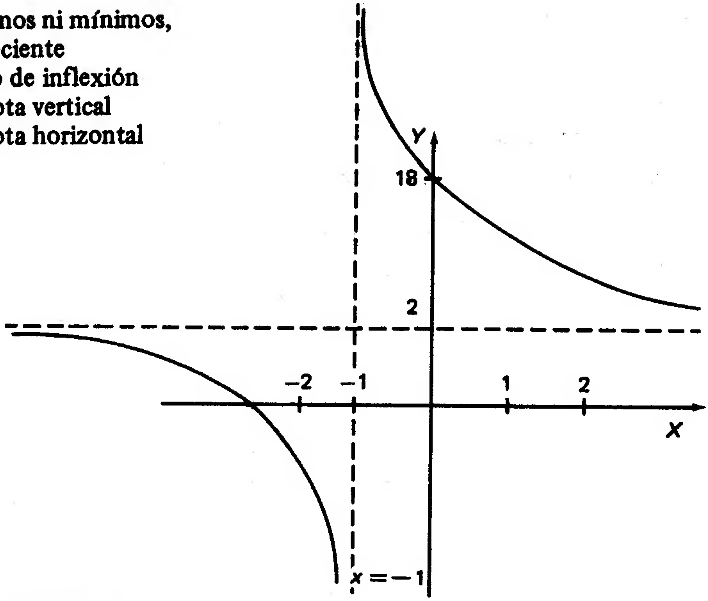
e) $x = 0$ mínimo
no hay punto de inflexión
$(0, \infty)$ creciente



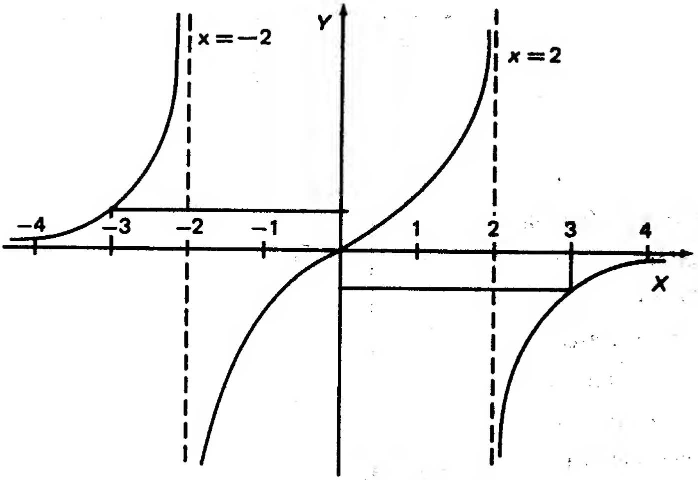
f) $x = 1$ punto de inflexión
$x = 0$ máximo
$x = 2$ mínimo
$x = 1$ asíntota vertical
$y = x + 1$ asíntota oblicua
$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ creciente
$(1, \infty)$ convexa arriba



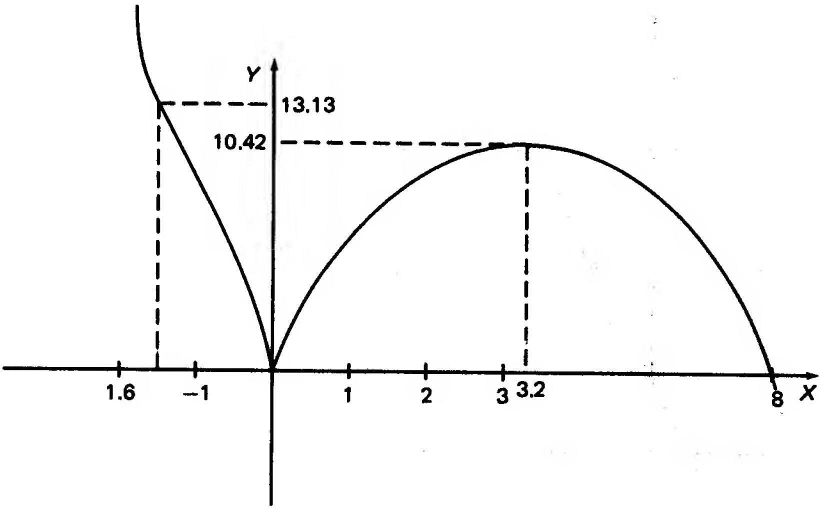
g) No hay máximos ni mínimos,
siempre decreciente
$x = -1$ punto de inflexión
$x = -1$ asíntota vertical
$y = \ 2$ asíntota horizontal



h) no hay máximo ni mínimo
siempre creciente
$x = -2,\ x = 0,\ x = 2$ puntos de inflexión
$x = -2,\ x = 2$ asíntotas verticales
$y = 0$ asíntota horizontal



i) $x = 0$ mínimo
$x = 3.2$ máximo
$(3.2, \infty)$ creciente
$(-\infty, -1{,}6)$ convexa arriba



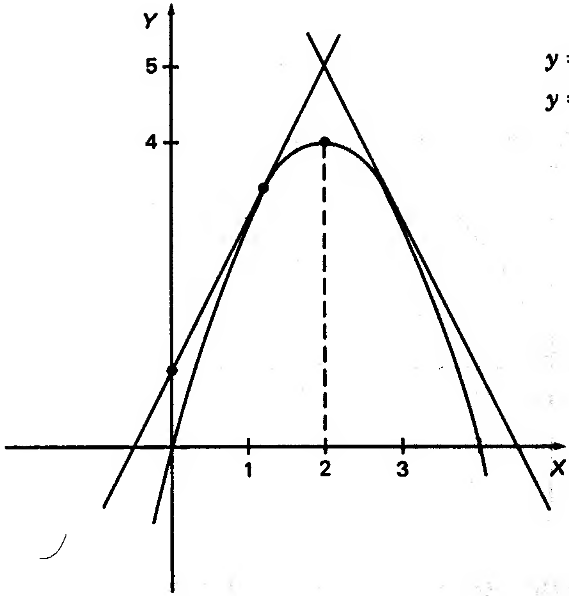
2. *a)* largo = 60 m, ancho = 60 m
b) $P = \$\ 7500$
c) largo = 80 m, ancho = 80 m
d) debe plantar 80 árboles
e) debe vender a \$480
f) altura = 3 pulg, largo = ancho = 12 pulg
g) $C = \$6194$. No puede construirse
h) $r = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$ $h = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ C mínimo $= 4\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} + 2\sqrt[4]{\pi}\right)$
i) deben usarse las 10 máquinas
el supervisor ganará \$ 5,333.33
el costo de preparación es de \$ 2000
ll) $\dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{2}{5}$
o) el salón debe ser circular, con $r = \dfrac{100}{\pi}$
p) vértices: (4, 0) y (0, 6)
q) nivel de producción, $x = 2000$
s) $x = 3$

3. *a)* $\dfrac{68}{23}$ km/h ; $\dfrac{160}{23}$ km/h
b) 3,6 m/seg
c) $\dfrac{dh}{dt} = 6.28x10^{-3}$ pies/min
f) $\dfrac{dv}{dt} = 9$; $\dfrac{dv}{dt} = 900$
g) $\dfrac{dy}{dt} = 0$; $\dfrac{dy}{dt} = 12$
h) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{8}{25}$; $\dfrac{dy}{dy} = \dfrac{-8}{25}$; $\dfrac{dy}{dt} = 0$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-40}{10{,}201}$

4. $y = 3x - 2$; $y = 3x + 2$

5. $2y = 3\sqrt{2} - x$; $-2y = 3\sqrt{2} + x$

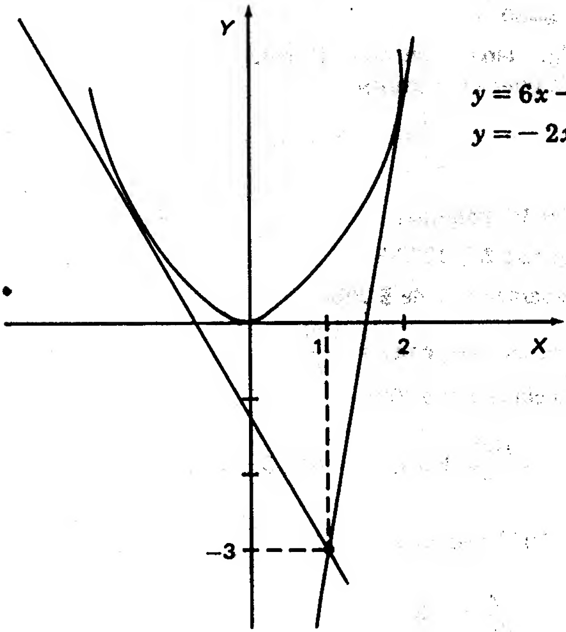
6.



$y = 2x + 1$

$y = -2x + 9$

7.



$y = 6x - 9$

$y = -2x - 1$

Capítulo 14

1. *a)* $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + c$ *b)* $F(x) = \dfrac{(x-2)^4}{4} + c$

c) $F(x) = \dfrac{(3x+5)^{\frac{5}{3}}}{5} + c$ *d)* $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + c$

e) $F(x) = \dfrac{1}{6} e^{3x^2} + c$ *f)* $F(x) = \dfrac{1}{5} \ln x$

g) $F(x) = \dfrac{2}{3}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}} + c$

2. *a)* $y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + 2$ *b)* $-3y^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

c) $-14y^{-2} = 7x^4 - 8x^{\frac{7}{2}} - 768$ *d)* $y = \dfrac{t^2}{2} - \ln t - \dfrac{1}{2}$

e) $y = \dfrac{t^3}{2} + t^2 + 2t + 4$

3. *a)* $\dfrac{(x+2)^4}{4} + c$ *b)* $\ln x - \dfrac{8}{x} + c$ *c)* $3x - 6\ln|x+2| + c$

d) $2\sqrt{1+x} + c$ *e)* 18 *f)* $\dfrac{7}{3}$ *g)* 20

4. *a)* $9U^2$ *b)* $\dfrac{285}{4}\ U^2$ *c)* $\dfrac{32}{3}\ U^2$ *d)* $\dfrac{37}{12}\ U^2$ *e)* $2U^2$

5. *a)* $\dfrac{361}{60}$

6. *a)* $V(t=2) = 30.4$ m/seg $e(t=2) = 80.4$ m
H máx. = 127.55 mt.

b) $V(t=2) = 12.6$ m/seg $e(t=2) = 32.6$ m
H máx. = 54.04 mt.

7. $y = \dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4 - \dfrac{16}{5}\sqrt{2}$

8. *a)* $k = -\dfrac{3}{8}$ *b)* k es tal que $k^3 + 5k - 10 = 0$ esto es, $k = 1.424$

c) $P(0 \leqslant x \leqslant 1) = \dfrac{3}{8}$ *d)* m es tal que $2m^3 + 3m^2 = 3$, $m = 0.806$

9. Aproximadamente 53.77 minutos.
10. Temperatura ambiente: $-6.5°C$
11. *a)* existirán 9553 moscas aprox. *b)* 5.04 días aprox.
12. *a)* 1.71448 gr *b)* 10,448.67 millones de años
13. *a)* \$ 508,330 *b)* \$ 297,666.66
14. \$ 4,107,000 ; 192,000 unidades

Indice